Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Sommer 2014
01.07.2014
Blatt 10

Übungen zu Höhere Mathematik II

(Abgabe am Dienstag, den 08.07.2014, 10:00h vor H45.2)

1. Seien $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$ bzw. $(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3$. Bestimme die Ableitungen der Abbildungen f, g und $f \circ g$ mit

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) := (y^3 x, y, 3x^2)^\top$$
$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x, y, z) := \big(\mathrm{e}^{2yz}, \cos(x)\big)^\top$$

in $(x, y)^\top$ bzw. $(x, y, z)^\top$.

Bestimme anschließend die Hessematrix $H_h(x, y, z)$ der Abbildung $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $h(x, y, z) := \big(g(x, y, z)\big)^\top g(x, y, z)$.

(1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

2. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f_A(x) := x^\top A x$.

   (a) Zeige, dass f_A differenzierbar ist und bestimme die Ableitung.

   (b) Sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeige, dass die Richtungsableitung von f_A in Richtung v im Punkt x durch $v^\top (A^\top + A)x$ gegeben ist.

   (c) Zeige, dass f_A auf $\mathbb{R}^n$ beliebig oft stetig differenzierbar ist.

   (d) Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Bestimme die Hessematrix $H_{f_A}(x)$ von f_A an der Stelle x.

(2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

3. Zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differenzialrechnung, dass

$$|\log(x)\log(y) - \log(v)\log(w)| \leq |x - v| + |y - w|$$

für alle $v, w, x, y \in \big[1, \exp(1)\big]$ gilt. Stelle sicher, dass die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, bevor er angewandt wird.

(5 Punkte)

4. Es sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ und $M \subset \mathbb{R}^m$ offen. Weiter sei $x_0 \in M$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$. Es existiere ein $\varepsilon > 0$, so dass in $U_\varepsilon(x_0)$ alle partiellen Ableitungen dritter Ordnung von f existieren und im Punkt x_0 stetig sind. Zeige, dass dann

$$f_{x_1 x_2 x_3}(x_0) = f_{x_2 x_3 x_1}(x_0)$$

gilt.

(4 Punkte)

Eine weitere Aufgabe befindet sich auf der nächsten Seite.

5. Betrachte $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y = 0, \\ \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass f im Punkt $x_0 = (0,0)^\top$ nicht differenzierbar ist, aber dennoch alle Richtungsableitungen (und damit insbesondere alle partiellen Ableitungen) existieren.

(2 + 2 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber einzeln aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.

https://www.uni-ulm.de/?id=54774