Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Sommer 2014
08.07.2014
Blatt 11

Übungen zu Höhere Mathematik II

(Abgabe am Dienstag, den 15.07.2014, 10:00h vor H45.2)

1. Bestimme alle lokalen Extrema der Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, mit

$$f(v,w,x,y) = vy(v+y) + \frac{1}{3}v^3 - 4v - \frac{1}{2}w^2 + w - x^2 + 2x + 42$$

(3 Punkte)

2. Betrachte die Funktionen $f, g\colon (-2,2)^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x,y) := x^2y^2 + x^2 - 5, \qquad f(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y = 1, \\ x^2y^3 + x^2 - 5 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (a) Zeige oder widerlege: Bei $(1,1)^\top$ liegt ein lokales Extremum von f vor.
   (b) Zeige oder widerlege: Bei $(0,0)^\top$ liegt ein lokales Extremum von f vor. Bestimme auch $\nabla f(0,0)$ und überprüfe $H_f(0,0)$ auf Definitheit.
   (c) Zeige oder widerlege: Bei $(0,0)^\top$ liegt ein lokales Extremum von g vor. Bestimme auch $\nabla g(0,0)$ und überprüfe $H_g(0,0)$ auf Definitheit.

(2 + 2 + 2 Punkte)

3. Bestimme Minimum und Maximum von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := -xy^2 + 11x$ unter der Nebenbedingung $x + 2y = 8$.

   (a) Verwende zunächst das notwendige Kriterium aus der Lagrangeschen Multiplikatorenregel.
   (b) Kontrolliere das Ergebnis von Teilaufgabe (a), indem Du die Nebenbedingung nach y auflöst, dies in f einsetzt und dann die Extremwerte von $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := f\big(x, y(x)\big)$ bestimmst.

(2 + 2 Punkte)

4. Betrachte die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} z^2 - y^2 \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeige, dass f in einer Umgebung von $(2,2,2)^\top$ lokal nach (y,z) aufgelöst werden kann. Es ist also zu zeigen, dass $\varepsilon, \delta > 0$ und eine eindeutige Abbildung $g\colon U_\delta(2) \to U_\varepsilon(2,2)$ existieren, mit $f\big(x, g_1(x), g_2(x)\big) = 0$ für alle $x \in U_\delta(2)$. Bestimme außerdem die Ableitung g'.
   (b) Zeige, dass in allen Punkten $(x,y,z)^\top$ mit $f(x,y,z) = 0$ solch eine eindeutige Funktion g existiert, außer im Punkt $(0,0,0)$.

(3 Punkte+3 Bonuspunkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

5. Zeige, dass $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^\top\} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} 2xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

in allen Punkten $(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^\top\}$ lokal umkehrbar ist. Kann man f global umkehren?

(3 Punkte)

6. Zeige, dass Lemma 4.3 gilt. Sei also $M \subset \mathbb{R}^3$ offen und seien $f, g\colon M \to \mathbb{R}^3$ differenzierbare Vektorfelder. Zeige, dass

   (a) $\operatorname{div}(f \times g)(x,y,z) = g(x,y,z)^\top \operatorname{rot} f(x,y,z) - f(x,y,z)^\top \operatorname{rot} g(x,y,z)$

   (b) $\operatorname{rot}\big(\operatorname{rot} f(x,y,z)\big) = \operatorname{grad}\big(\operatorname{div} f(x,y,z)\big) - \Delta f(x,y,z)$

   für alle $(x,y,z)^\top \in M$ gilt.

(3 + 3 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber einzeln aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.