Übungen zu Höhere Mathematik II

(Abgabe am Dienstag, den 22.07.2014, 10:00h vor H45.2, nur bei unter 130 Punkten)

1. Wir betrachten eine Kurve γ in $\mathbb{R}^2$, auf der genau die Punkte liegen, deren Koordinaten (r, φ) aus der Polarkoordinatendarstellung die Gleichung

$$r = 1 + \cos(\varphi)$$

erfüllen.

- (a) Bestimme eine Parameterdarstellung der Kurve und zeige, dass sie nicht glatt ist.
(b) Bestimme die Länge der Kurve.

(3 + 3 Bonuspunkte)

2. Bestimme jeweils das Kurvenintegral $\int_{\gamma} f$. Gib eine Stammfunktion an, sofern sie existiert. Begründe andernfalls, weshalb sie nicht existiert.

- (a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) := (x - y, x)^{\top}$ und $\gamma: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) := (t^2, t)^{\top}$.
(b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y, z) := (y^2z^3 + y, 2xyz^3 + x, 3xy^2z^2 + 1)^{\top}$ und $\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) := (t^2 + 1, \cos(t), e^t)^{\top}$

(3 + 3 Bonuspunkte)

3. Es sei $B \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$B := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right) \right\}.$$

- (a) Zeige, dass B ein Normalbereich bezüglich der x -Achse ist.
(b) Zeige, dass B ein Normalbereich bezüglich der y -Achse ist.
(c) Parametrisiere den positiv orientierten Rand von B . Bestimme also eine Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, so dass γ gerade ∂B durchläuft und B immer links von $\gamma(t)$ liegt.
(d) Die Menge B entspricht der Menge M von Blatt 7, Aufgabe 5. Bestimme erneut $|B|$, aber nicht mit dem Prinzip von Cavalieri, sondern mit einem Kurvenintegral.

(3 + 3 + 3 + 4 Bonuspunkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber einzeln aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.