

Tutorium 10 - Aufgaben

10 Mehrdimensionale Differenzialrechnung

10.1 Differenzierbarkeit

Aufgabe 1: Sind die Funktionen stetig? Existieren alle Richtungsableitungen und die totale Ableitung?

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y = 0 \\ \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6} & \text{sonst} \end{cases}$$
$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y = 0 \\ \frac{|x|y}{|x|+y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2: Zeige mithilfe der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

dass der Mittelwertsatz nicht für vektorwertige Funktionen gilt.

10.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnungen

Aufgabe 3: Zeige, dass für die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y = 0 \\ xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x}$$

gilt.

Aufgabe 4: Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gelte

$$f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$$

Zeige

$$\langle \text{grad} f(x), x \rangle = 2f(x)$$