

2 lineare Abbildungen

2.1 lineare Abbildung oder nicht ?

Aufgabe 1: Sind die Abbildungen T_i linear oder nicht?

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T_1(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ x \end{pmatrix}$$

$$T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T_2(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ \sin y \end{pmatrix}$$

$$T_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T_3(x, y) = \begin{cases} (2x, x), & \text{falls } x = y \\ \left(\frac{x^2 - y^2}{x - y}, x\right) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$T_4 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, T_4(z) = \bar{z} \quad \text{mit } K = \mathbb{R} \text{ und } K = \mathbb{C}$$

2.2 Abbildungsmatrizen

Aufgabe 2: Gegeben seien die Basen des \mathbb{R}^2

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ und } B'' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \right)$$

und die (linearen) Abbildungen

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, S(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + 4y + 7z \\ 2x + 5y + 8z \end{pmatrix}$$

Bestimme

- $M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}}(T), M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{B}'}(T)$
- $M_{\mathbb{B}''}^{\mathbb{E}}(S), M_{\mathbb{B}}^{\mathbb{E}}(T \circ S)$

wobei \mathbb{E} die kanonische Basis des \mathbb{R}^3 sei.

2.3 Bild, Kern und Rang von linearen Abbildungen

Aufgabe 3: Bestimme Bild, Kern und Rang der linearen Abbildungen bzw. Ma-

$$\text{trizen } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \chi : \mathbb{P}_5 \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f(1)$$

Dabei bezeichnet \mathbb{P}_5 die Polynome vom Grad ≤ 5 (siehe Tutorium 1).