

## Tutorium 3 - Aufgaben

### 3 Determinanten

#### 3.1 lineare Abbildung mit einer Matrix

Aufgabe 1: Zeige für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} A \text{ injektiv} &\Leftrightarrow A \text{ surjektiv} \Leftrightarrow A \text{ bijektiv} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Ker} A = \{0\} \Leftrightarrow \text{Bild} A = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \text{rg} A = n \end{aligned}$$

#### 3.2 Permutationen und Signum

Aufgabe 2: Zeige

$$\text{sgn } \sigma = \text{sgn } \sigma^{-1}$$

Aufgabe 3: Bestimme für die Permutationen

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

jeweils die Zahl der Inversionen und  $\sigma \circ \tau$ ,  $\sigma^2$ ,  $\sigma^3$  und  $\sigma^{-1}$

#### 3.3 Determinanten

Aufgabe 4: Berechne mithilfe der Definition der Determinante

$$\begin{vmatrix} E - mc^2 & 0 & -pc & 0 \\ 0 & E - mc^2 & 0 & pc \\ -pc & 0 & E + mc^2 & 0 \\ 0 & pc & 0 & E + mc^2 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 5: Bestimme die folgenden Determinanten (sofern definiert)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 6: Berechne die Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x$$

mithilfe der Cramerschen Regel und der Inversen.