Tutorium 3 - Aufgaben

4 euklidische und unitäre Vektorräume

4.1 Skalarprodukt

Aufgabe 1: Skalarprodunkt oder nicht?

Entscheide, ob es sich bei den folgenden Abbildungen um ein Skalarprodukt handelt:

a)

$$< \cdot, \cdot >_M : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad < x, y >_M := x^T M y$$

i) $< \cdot, \cdot >_A$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ii) $< \cdot, \cdot >_B$ mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii) $< \cdot, \cdot >_C$ mit $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

b)

$$< \cdot, \cdot >_{F_i} : C[-1,1] \times C[-1,1] \to \mathbb{R}$$

i) $< \cdot, \cdot >_{F_1}$: $\quad < f, g >_{F_1} := \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

ii) $< \cdot, \cdot >_{F_2}$: $\quad < f, g >_{F_2} := \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)-1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

iii) $< \cdot, \cdot >_{F_3}$: $\quad < f, g >_{F_3} := \int_{-1}^{1} |f(x)g(x)| \mathrm{d}x$

iv) $< \cdot, \cdot >_{F_4}$: $\quad < f, g >_{F_4} := \int_{-1}^{1} (f(x) + g(x)) \mathrm{d}x$

Aufgabe 2: Zeige für zwei Vektoren x, y eines euklidischen Vektorraumes

$$x \perp y \iff ||x + \lambda y|| \geq ||x|| \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(Für die Rückrichtung ist $\lambda = -\frac{<y,x>}{<y,y>}$ hilfreich)

4.2 Gram-Schmidtsches-Orthogonalisierungsverfahren

Aufgabe 3: Orthonormiere mit Gram-Schmidt

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich $< x, y >= \sum_{k=1}^{4} x_k y_k$ und $< x, y >= \sum_{k=1}^{4} k x_k y_k$

b) $f_1(x) = 2x,\ f_2(x) = x + \sqrt{1-x^2},\ f_3(x) = 2x^3$ bezüglich $< f, g >_{F_1}$

4.3 Eigenschaften von Matrizen

Aufgabe 4: Zeige für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- A ist positiv definit $\iff -A$ ist negativ definit
- A ist positiv definit $\implies$ Alle Diagonalelemente von A sind positiv