6 Hauptminorenkriterium, Spektralsatz und Hauptachsentransformation

6.1 Positive Definitheit im Kontext des Hauptminorenkriteriums

6.1.1 Anwendung des Hauptminorenkriterums

Zeige:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ist positiv definit}$$

und

$$B := \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ 2i & -5 \end{pmatrix} \quad \text{ist negativ definit}$$

6.1.2 Schärfe des Hauptminorenkriterums

Zeige:

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv semidefinit. Dann ist $\det(A) \geq 0$.

6.1.3 Matrixpotenzieren und Eigenwertkriterium

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ negativ definit. Zeige:

$$A^k \begin{cases} \text{positiv definit} & \text{k gerade} \\ \text{negativ definit} & \text{k ungerade} \end{cases} \tag{1}$$

6.2 Der Spektralsatz

6.2.1 Aussage des Spektralsatzes

Besitzt der Vektorraum $\mathbb{C}^3$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren der folgenden Matrix C?

$$C := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \tag{2}$$

6.2.2 Unitäres Diagonalisieren

Gegeben sei folgende Matrix.

$$M = \begin{pmatrix} 1+i & -i & i \\ -i & 1+i & -i \\ i & -i & 1+i \end{pmatrix} \tag{3}$$

Finde eine Matrix $U \in U_3$ sodass $\overline{U}^T MU$ eine Diagonalmatrix ist.

6.2.3 Normale Matrizen

Zeige mit Hilfe des Spektralsatzes, dass normale Matrizen, die bloß reelle Eigenwerte haben, automatisch hermitesch sind.

6.2.4 Anwendung der kompletten Theorie

Sei A eine unitäre, hermitesche, positiv semidefinite Matrix. Dann ist $A = I$ die Einheitsmatrix

6.2.5 Matrixzerlegungen mit dem Spektralsatz

Sei A eine hemitesche Matrix. Dann gibt es eine positiv semidefinite Matrix P und eine negativ semidefinite Matrix N sodass $A = P + N$. Kann man auch sagen dass es gleich eine positiv definite Matrix P und eine negativ definite Martrix N mit dieser Eigenschaft gibt ?

6.3 Die Hauptachsentransformation

Wir wollen die Folgende Menge untersuchen:

$$Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 - 3y^2 - 8xy + 22x + 4y + 7 = 0\} \tag{4}$$

Bringe Q mit Hilfe der Hauptachsentransformation auf eine Gestalt, die ihr Aussehen offensichtlich macht.