Tutorium 8 - Aufgaben

8 Mehrdimensionale Integration

8.1 Messbarkeit

Aufgabe 1: Cantormenge

$$w([a,b]) := \left[a, a + \frac{b-a}{3}\right] \cup \left[b - \frac{b-a}{3}, b\right]$$
$$w\left(\bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k]\right) := \bigcup_{k=1}^{n} w\left([a_k, b_k]\right)$$

für $n \in \mathbb{N}$ und disjunkte Intervalle $[a_k, b_k]$. Nun definiert man die Mengenfolge

$$C_0 := w([0,1]) \qquad\qquad C_{n+1} := w(C_n) \forall n \in \mathbb{N}_0$$

und damit die Cantormenge durch

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

Zeige, dass

$$|C| = 0$$

Aufgabe 2:

Zeige, dass

$$M := \mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2 \tag{1}$$

nicht messbar ist.

8.2 Substitutionsregel

Aufgabe 3: Berechne

a) $\int_{M_1} ye^{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\qquad M_1 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 | 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9, y \geqslant 0\}$

b) $\int_{M_2} |x|$ $\qquad M_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 || x| \leqslant R\}$

c) $\int_{M_3} e^{x^2+y^2}$ $\qquad M_3 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 | \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqslant 1\}$

d) $\int_{M_4} \frac{1}{y(1+x^2+y^2)}$ $\qquad M_4 = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 | 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 3, x \geqslant 0, |x| \leqslant y\}$

e) $\int_{M_5} \frac{\cos(1+x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\qquad M_5 = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 | 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4, x \leqslant 0, z \leqslant 0\}$