

9 Mehrdimensionale Differenzialrechnung

9.1 Topologische Grundbegriffe

Aufgabe 1: Welche der Aussagen in Proposition 3.1 kann auch für nicht stetige Funktionen gelten? Folgen die Aussagen auch für nicht stetige Funktionen?

Aufgabe 2: Zeige: Jede ϵ -Umgebung ist offen.

Aufgabe 3: Skizziere die Menge $A_i \subset \mathbb{R}^2$ und schreibe als Menge bzw. beantworte (ohne Beweis) (euklidische Norm)

a) $\overset{\circ}{A}_i, \bar{A}_i, \partial A_i$ b) Ist A_i offen? c) Ist A_i abgeschlossen? d) Ist A_i beschränkt?

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} < 2 \right\} \quad A_2 = A_1 \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$A_3 = [0, 1) \times (1, 2] \quad A_4 = \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right) \times [0, 1]$$

Aufgabe 4: Zeige:

$$(\overset{\circ}{A}^C) \subset (\overset{\circ}{A})^C$$

Gilt Gleichheit?

9.2 Integrale

Aufgabe 5:

Zeige

$$\int_0^1 \int_0^{\infty} (2 - xy)xye^{-xy} dy \, dx \neq \int_0^{\infty} \int_0^1 (2 - xy)xye^{-xy} dx \, dy$$

und erläutere, ob dies Proposition 3.3 widerspricht.

Aufgabe 6:

Berechne

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$