Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Freitag, 2. Mai 2014, vor den Übungen

1. Es seien die folgenden Geraden in der xy- Ebene, die wir mit dem $\mathbb{R}^2$ identifizieren, gegeben:

$$\begin{aligned} g_1 &: \quad 8x = 17y - 31 \\ g_2 &: \quad y + \frac{35}{51}x = \frac{59}{51} \\ g_3 &: \quad x = 3 \end{aligned}$$

   (a) Stelle die Punkt- Richtungs- Gleichungen aller drei Geraden auf.
   (b) Bestimme alle Schnittpunkte dieser Geraden.
   (c) Skizziere die drei Geraden. (4 Punkte)

2. Entscheide, welche der folgenden linearen Gleichungssysteme lösbar sind und gib gegebenenfalls die Lösungsmenge an:

(a) $$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - 2y - 4z = 0 \\ 3x + 5y + z = 4 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 1 \\ x + 10y - 9z = 3 \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} w + x + y + z = 3 \\ 2w - x - y + 2z = 3 \\ w + 2x + y - 3z = 1 \end{cases}$$

(6 Punkte)

3. Die Ebene $E_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ gehe durch die drei Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Überprüfe, ob die beiden Punkte

$$P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix}$$

   auf E_1 liegen.
   (b) Bestimme eine Parameterdarstellung von $E_2 \colon x + 2y - z = 1$.
   (c) Stelle eine Punkt- Richtungs- Gleichung der Schnittgeraden g von E_1 und E_2 auf. (5 Punkte)

4. Es seien $a_1, b_1, c_1, c_2, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ und die zwei Ebenen E_1 und E_2 in Koordinatenform

$$\begin{aligned} E_1: &\quad a_1x + b_1y + c_1z = k_1 \\ E_2: &\quad 3a_1x + 3b_1y + c_2z = k_2 \end{aligned}$$

gegeben.
Gib sämtliche mögliche Typen für die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ dieses Gleichungssystems an und stelle fest, unter welchen Bedingungen an die Koeffizienten $a_1, b_1, c_1, c_2k_1, k_2$ diese Typen vorliegen.

(3 Punkte)

5. Es sei für jedes $k \in \mathbb{R}$ eine Ebene E_k mit

$$x_1 + (k-2)x_2 + (2k+1)x_3 = 5 - 2k$$

gegeben.

(a) Die Gerade g verläuft durch die Punkte $P = (0, -4, 1)$ und $Q = (3, 2, -2)$ und schneidet die Ebene E_1 im Punkt S. Bestimme S.

(b) Zeige, dass die Punkte P und Q auf verschiedenen Seiten der Ebene E_1 liegen.

(c) Welche der Ebenen E_k enthält den Ursprung?

(d) Zeige, dass eine Gerade h existiert, die in allen Ebenen E_k liegt und bestimme eine Gleichung von h.

(e) Zeige, dass mit der Ebene $E\colon x_2 + 2x_3 = -2$ eine Ebene durch diese Gerade h gegeben ist, die mit keiner der Ebenen E_k zusammenfällt.

(6 Punkte)