Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 3. Juli 2014, vor den Übungen

1. Zeige, dass eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$$

und gib f explizit an. (4 Punkte)

2. (a) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix}\lambda\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}?$$

   (b) Bestimme im Falle der Existenz

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

   in Abhängigkeit von λ.

   (c) Bestimme im Falle der Existenz eine Basis von Bild(f) und Kern(f) in Abhängigkeit von λ. (6 Punkte)

3. Es seien $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ und die durch $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ über die Darstellungsmatrix

$$\mathcal{M}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\2 & 2 & 2\\-3 & -6 & -6\end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Bestimme die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}(\varphi, \mathcal{B}_i, \mathcal{B}_i)$ bzgl. den Basen

   (a) $\mathcal{B}_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\}$

   (b) $\mathcal{B}_2 = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

   (c) $\mathcal{B}_3 = \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ (6 Punkte)

4. Es sei $\mathcal{B}$ wiederum die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$, und $\varphi \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ habe die Abbildungsmatrix

$$\mathcal{M}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Finde vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ mit $\varphi(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$ und $\varphi(\vec{v}_2) = -2\vec{v}_2$.

   (b) Finde eine Basis $\widetilde{\mathcal{B}}$ des $\mathbb{R}^2$, so dass

$$\mathcal{M}(\varphi, \widetilde{\mathcal{B}}, \widetilde{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   gilt. (4 Punkte)

5. Es sei $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ die kanonische Basis des K^n und $\mathcal{B}_2 = \{\vec{e}\,'_1, \ldots, \vec{e}\,'_m\}$ die kanonische Basis des K^m.

   (a) Es sei f_{ij} mit $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ über $f_{ij} \colon K^n \to K^m$ mit $f_{ij}(\vec{e}_k) = \delta_{jk} \cdot \vec{e}\,'_i$ für $1 \leq k \leq n$ und dem Kronecker- Symbol δ_{ik} mit

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   gegeben. Bestimme die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}(f_{ij}, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$.

   (b) Es sei nun

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} f_{ij}$$

   mit $\lambda_{ij} \in K$ gegeben. Bestimme nun die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$. (4 Punkte)