Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 10. Juli 2014, vor den Übungen

1. Es sei
$$R = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$
Zeige:
   (a) Es bildet $(R, +, \cdot)$ bzgl. der Matrizenaddition und -multiplikation einen Ring. Ist R auch ein Körper?
   (b) Die Abbildung $\Phi\colon \mathbb{C} \to R$, $\alpha + i\beta \to \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ ist ein Ringisomorphismus.
   (c) In R ist die Gleichung $X^2 + 1 = 0$ lösbar (mit Angabe der Lösung). (5 Punkte)

2. (a) Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ gegeben. Die Spur von A ist definiert als $\operatorname{Spur} A := \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\nu}$.
   Zeige:
      i. $\operatorname{Spur}(A + B) = \operatorname{Spur} A + \operatorname{Spur} B$
      ii. $\operatorname{Spur}(\alpha A) = \alpha \cdot \operatorname{Spur} A$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$
      iii. $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$
   (b) Es sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$. Beweise: Es gibt keine Matrix $X \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ mit $AX - XA = E_n$. (5 Punkte)

3. Bestimme für $\varphi \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $\varphi(x, y, z) = (-z, x + 2y + z, x + 3z)^T$ bzgl. der Basen $\mathcal{B}_1$ als kanonischer Basis des $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B}_2 = \{(-1, 0, 1)^T, -\vec{e}_2, (-2, 1, 1)^T\}$ die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}(\varphi, \mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j)$ mit $1 \le i, j \le 2$. (6 Punkte)

4. Es sei $\mathcal{B}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ und die Scherung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(x, y) \to (x + \lambda y, y)$ gegeben.
   (a) Bestimme die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B})$.
   (b) Gib eine Basis $\mathcal{B}'$ an, so dass $\mathcal{M}(\varphi, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = E_2$ ist. (4 Punkte)

5. Es seien $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und V der Raum der Polynome vom Grad kleiner gleich n und $\psi\colon V \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $p(x) \to (p(x_0), \ldots, p(x_n))$.
   Es sei $\mathcal{B} = \{1, x, \ldots, x^n\}$ eine Basis von V und $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n+1}\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^{n+1}$.
   (a) Bestimme die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}(\psi, \mathcal{E}, \mathcal{B})$.
   (b) Es sei $\mathcal{B}' = \{f_0, \ldots, f_n\}$, wobei die Polynome durch
   $$f_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$
   definiert sind. Bestimme die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}(\psi, \mathcal{E}, \mathcal{B}')$. (4 Punkte)