# Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 8. Mai 2014, vor den Übungen

1. Wenn wir die Punkt- Richtungs- Gleichung für Geraden aus Kapitel 1 abstrakt auf die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ übertragen, ist eine "Gerade" in $\mathbb{Z}$ eine Menge der Form $g = \{a + t \cdot u \colon t \in \mathbb{Z}\}$, wobei der Aufpunkt $a$ und der Richtungsvektor $u \neq 0$ nun ganze Zahlen anstatt Punkte im Raum sind und der Parameter $t$ nun über $\mathbb{Z}$ statt über $\mathbb{R}$ läuft.
   Zeige mittels Konstruktion von Beispielen, dass in $\mathbb{Z}$ die Anschauung trügt,
   (a) da zwei verschiedene Geraden mehrere Schnittpunkte haben können,
   (b) da zwei verschiedene Punkte nicht mehr eindeutig eine Gerade festlegen müssen. (2 Punkte)

2. Mittels dreier verschiedener Pumpen $P_1$, $P_2$ und $P_3$ soll ein Wasserhochbehälter entleert werden. Die Pumpen $P_1$ und $P_2$ zusammen würden zwölf Stunden brauchen, Pumpen $P_2$ und $P_3$ zusammen 15 Stunden und Pumpen $P_1$ und $P_3$ zusammen 20 Stunden.
   Wie lange brauchen alle drei Pumpen zusammen? (4 Punkte)

3. Die Formulierung der Axiomen für eine Gruppe lässt sich alternativ auch derart darstellen:
   (G2') Es existiert ein <u>linksneutrales</u> Elementes $e$ mit $e \circ a = a$ für alle $a \in G$.
   (G3') Zu jedem $a \in G$ gibt es ein <u>linksinverses</u> Element $a^{-1}$ (bzgl. $e$), so dass $a^{-1} \circ a = e$ ist.

   Zeige:
   (a) Aus dem Assoziativgesetz und den Axiomen $(G2')$ und $(G3')$ folgt, dass $a^{-1}$ auch rechtsinvers ist, d.h. es gilt: $a \circ a^{-1} = e$.
   (b) Das Element $e$ ist auch rechtsneutral, d.h. für alle $a \in G$ gilt: $a \circ e = a$.
   (c) Es gibt genau ein neutrales Element mit $a \circ e = e \circ a = a$ für alle $a \in G$.
   (d) Zu jedem $a \in G$ gibt es genau ein inverses Element $a^{-1}$ mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.
   (e) Welche Folgerungen ergeben sich, wenn man ein linksneutrales Element und ein rechtsinverses Element in den Axiomen fordet? (7 Punkte)

4. Überprüfe, ob die gegebenen Mengen mit den angegebenen Verknüpfungen Gruppen bilden:
   (a) $(G, \star)$ mit $G = \mathbb{R}$ und
   $$\star\colon \begin{cases} G \times G \to G \\ (a,b) \to a \star b := \frac{a-2ab+b}{3} \end{cases}$$
   (b) $(F, +)$ mit $F := \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to ax^2 + bx + c,\ a,b,c \in \mathbb{R}\}$ und $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$.
   (c) $(G, \cdot)$ mit $G = \{\pm 1\}$ und der gewöhnlichen Multiplikation.
   (d) $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ mit $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ y_1 \cdot y_2 \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. (4 Punkte)

5. Es sei $M$ eine nichtleere Menge.
   Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von $M$, d.h. $\mathcal{P}(M) := \{N\colon N \subseteq M\}$, wird für $A, B \in \mathcal{P}(M)$ folgende Verknüpfung definiert:

$$A\Delta B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A),$$

   die sogenannte symmetrische Differenz.
   Zeige, dass $\mathcal{P}(M)$ versehen mit der Verknüpfung $\Delta$ eine abelsche Gruppe bildet. (3 Punkte)

6. Es sei $G$ eine endliche Gruppe. Zeige:

   (a) Bildet man zu jedem $g \in G$ das inverse Element, so erhält man alle Elemente der Gruppe.

   (b) Verknüpft man sämtliche Elemente einer endlichen Gruppe $G$ von links mit einem beliebigen Element der Gruppe, so erhält man wieder sämtliche Elemente der Gruppe. (4 Punkte)