Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Donnerstag, 15. Mai 2014, vor den Übungen

1. Es sei G die Gruppe der Kongruenzabbildungen eines Quadrats mit den (im Gegenuhrzeigersinn numerierten) Ecken 1, 2, 3 und 4 auf sich. Die Elemente von G werden derart bezeichnet, dass etwa
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
bedeute, dass die Ecken 1 und 3 fest bleiben sowie die Ecke 2 auf die Ecke 4 und die Ecke 4 auf die Ecke 2 abgebildet werden. Die Verknüpfung $\circ$ zweier Abbildungen ist die "Hintereinanderausführung", wobei $A_i \circ A_k$ jene Abbildung darstelle, die man erhält, wenn man zuerst die Abbildung A_k und anschließend die Abbildung A_i ausführt.
   (a) Wieviele Elemente hat G?
   (b) Gib die Elemente von G explizit an und stelle die Gruppentafel auf.
   (c) Bestimme zu jedem Element das Inverse.
   (d) Ist G abelsch?
   (e) Zeige, dass die Teilmenge D der Drehungen des Quadrats um seinen Mittelpunkt mit den Drehwinkeln $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$ und 2π eine Untergruppe von G ist. (7 Punkte)

2. Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $m\mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{Z}\colon \exists k \text{ mit } n = k \cdot m\}$.
   (a) Zeige, dass $(m\mathbb{Z}, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ darstellt.

   Wir teilen die ganzen Zahlen nun folgendermaßen in m disjunkte Teilmengen auf:
   Zu jedem $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ betrachten wir die Menge
$$\overline{r} = r + m\mathbb{Z} := \{r + m \cdot k\colon k \in \mathbb{Z}\},$$
   welche man als Restklassen modulo m bezeichnet.
   Die Addition von Restklassen ist durch $\overline{r} + \overline{s} = \overline{r+s}$ definiert.

   (b) Zeige, dass die Addition wohldefiniert ist, also nicht von der Auswahl der Repräsentanten abhängt.
   (c) Die Menge der Restklassen modulo m wird mit $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ bezeichnet.
   Zeige: $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ bildet mit der oben erklärten Addition eine abelsche Gruppe. (4 Punkte)

3. Wir betrachten die Menge $V = \mathbb{R}^2$ mit der angegebenen Addition und der skalaren Multiplikation. Sie stellen jeweils keinen Vektorraum dar. Gib an, welche Axiome verletzt sind.
   (a) komponentenweise Addition und die skalare Multiplikation $\lambda \circ \vec{x} = (2\lambda x_1, 2\lambda x_2)$.
   (b) Addition über $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 1, x_2 + y_2 + 1)$ und die skalare Multiplikation über $\lambda \circ \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2)$. (4 Punkte)

4. Überprüfe, ob die folgenden Mengen mit den jeweiligen Standardverknüpfungen (sofern nichts anderes angegeben ist) Vektorräume über dem Körper $\mathbb{R}$ sind:

   (a) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon x_1 + x_2 = x_n\}$ mit $n \geq 2$

   (b) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon x_1 \cdots x_n = 0\}$ mit $n \in \mathbb{N}$

   (c) Menge der Paare (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$, die die Gleichung $ax + by = 0$ lösen.

   (d) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon x_1 + x_2 = 0 \wedge x_1 - x_2 = 0\}$

   (e) $\mathbb{R}^2$ mit der komponentenweisen Addition und der skalaren Multiplikation

$$\lambda \circ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2\lambda x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(5 Punkte)

5. Gib für die folgenden Mengen V je eine innere Verknüpfung $\oplus \colon V \times V \to V$ sowie auch eine Abbildung $\circ \colon \mathbb{R} \times V \to V$ an, damit $(V, \oplus, \circ)$ einen reellen Vektorraum bildet:

   (a) $V = \mathbb{R}$

   (b) $V = \mathbb{R}^+$

   (c) V als die Menge der Klassen parallelgleicher Pfeile im Raum

   (d) V als die Menge aller Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (4 Punkte)