ulm university universität uulm

Übungen zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Donnerstag, 5. Juni 2014, vor den Übungen

1. Es sei $S_3 = \{\gamma_0 = id, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5\}$.
   Die Menge R sei durch die Menge aller Ausdrücke $\lambda_0\gamma_0 + \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \lambda_3\gamma_3 + \lambda_4\gamma_4 + \lambda_5\gamma_5$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ definiert.
   Die Addition auf R wird komponentenweise definiert und die Multiplikation durch $\gamma_i \cdot \gamma_j = \gamma_i \circ \gamma_j$, wobei $\circ$ die Komposition auf S_3 ist und ansonsten $(\lambda_i\gamma_i) \cdot (\lambda_j\gamma_j) = (\lambda_i\lambda_j)(\gamma_i \cdot \gamma_j)$. Zudem sollen die Distributivgesetze gelten.

   (a) Besitzt R ein Einselement?

   (b) Ist R kommutativ?

   (c) Gibt es $\alpha, \beta \in R\backslash\{0\}$ mit $\alpha \cdot \beta = 0$? (3 Punkte)

2. (a) Es sei $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ der Körper mit zwei Elementen.
   Finde die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & +x_2 & & = 0 \\ x_1 & & +x_3 & = 0 \end{array}$$

   (b) Ein Körper $\mathbb{F}_4$ mit vier Elementen ist durch $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, t, t+1\}$ mit $1 + 1 = 0$ und $t^2 = t + 1$ gegeben. Stelle die Verknüpfungstafeln für Addition und Multiplikation in $\mathbb{F}_4$ auf.
   Die Körpereigenschaft braucht nicht bewiesen zu werden.

   (c) Finde die Lösungsmenge des folgenden LGS mit Koeffizienten aus $\mathbb{F}_4$:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +tx_3 & = t \\ tx_1 & +(t+1)x_2 & & = 1 \\ (t+1)x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0. \end{array}$$

   (5 Punkte)

3. Bestimme Real- und Imaginärteil sowie den Betrag der folgenden komplexen Zahlen:

   (a) $z_1 = (2 - i)^4$

   (b) $z_2 = \frac{2-i}{5i} + \frac{1+2i}{3-4i}$

   (c) $z_3 = i\sqrt{2} - 1 - (1 + i) \cdot (1 - i\sqrt{2})$

   (d) $z_4 = z^2$

   (e) $z_5 = \frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}}$

   (f) $z_6 = i^{99}$ (3 Punkte)

4. (a) Löse die Gleichung $|z| - z = 1 + 2i$ in $\mathbb{C}$.

   (b) Löse das folgende Gleichungssystem in den komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned} 2z_1 + z_2 &= 5 \\ 3z_1 - iz_2 &= 1. \end{aligned}$$

   (c) Zeige, dass eine einzelne komplexe Gleichung $(a+ib)\cdot(x+iy) = u+iv$ zu einem System zweier reeller Gleichungen äquivalent ist.

   (d) Schreibe das aus zwei komplexen Gleichungen bestehende System aus Teilaufgabe b) in ein System reeller Gleichungen um und löse dies. (5 Punkte)

5. Bestimme eine Basis des $(7, 4)$- Hammingcodes. Die Basiseigenschaft ist nachzuweisen. (2 Punkte)

6. (a) Es sei M eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Die Addition Δ zweier Mengen sei über die in Aufgabe 5 von Übungsblatt 2 definierte symmetrische Differenz definiert und die skalare Multiplikation $\cdot$ über $0 \cdot A = \emptyset$ und $1 \cdot A = A$ für alle $A \in \mathcal{P}(M)$.
   Zeige, dass $(\mathcal{P}(M), \Delta, \cdot)$ einen Vektorraum darstellt.

   (b) In den folgenden Beispielen ist jeweils V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ eine Teilmenge. Begründe jeweils, ob U auch ein Untervektorraum von V ist:

      i. $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$, $U = \{z \in \mathbb{C} \colon \Re(z) = \Im(z)\}$
      ii. $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}$, $U = \{z \in \mathbb{C} \colon \Re(z) = \Im(z)\}$
      iii. $K = \mathbb{F}_2$, V der Vektorraum aus Teilaufgabe a), U als die Familie aller endlicher Teilmengen von M mit einer geraden Anzahl an Elementen (6 Punkte)