Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 36 Punkte, davon 12 Zusatzpunkte
Abgabe: Dienstag, 12. Januar 2016, vor den Übungen

1. (Reeller Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes)
Es sei χ mod q ein reeller und vom Hauptcharakter verschiedener Dirichletcharakter, d.h. $\chi^2 = \chi_0$, aber $\chi \neq \chi_0$.

   (a) Es sei $a_n = (\chi \star 1)(n)$. Zeige, dass $a_n \geq 0$ und $a_{n^2} \geq 1$ gilt.

   (b) Zeige mit der Eulerschen Summenformel
$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{x} + b + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
für eine Konstante b.

   (c) Es seien
$$\begin{aligned} S(x,\chi) &:= \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \\ S_1(x,\chi) &:= \sum_{d \leq \sqrt{x}} \sum_{m \leq \frac{x}{d}} \frac{\chi(d)}{\sqrt{dm}} \\ S_2(x,\chi) &:= \sum_{n \leq \sqrt{x}} \sum_{\sqrt{x} < d \leq \frac{x}{m}} \frac{\chi(d)}{\sqrt{dm}}. \end{aligned}$$
Zeige mittels Teilaufgabe b)
$$S_1(x,\chi) = 2\sqrt{x} \cdot \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(d)}{d} + b \cdot \left(L(1/2,\chi) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) + O(1) = 2\sqrt{x} \cdot \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(d)}{d} + O(1)$$
für $x \to \infty$.

   (d) Zeige:
$$\sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{\chi(d)}{d} = L(1,\chi) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
für $x \to \infty$.

   (e) Zeige $S_2(x,\chi) = O(1)$.

   (f) Zeige unter Verwendung der Teilaufgaben c), d) und e), dass aus $L(1,\chi) = 0$ die Aussage $S(x,\chi) = O(1)$ für $x \to \infty$ folgt.

   (g) Zeige unter Verwendung von Teilaufgabe a), dass
$$S(x,\chi) \geq \frac{1}{2} \cdot \log x$$
für $x \to \infty$ gilt.

   (h) Zeige $L(1,\chi) \neq 0$. (16 Punkte)

2. Wir setzen Aufgabe 1 von Übungsblatt 9 fort. Zeige:

   (a) Eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n \in [0,1)$ ist auf dem Intervall $[0,1)$ genau dann gleichverteilt, wenn

   $$\sum_{n \le x} e(ma_n) = o(x)$$

   für alle $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ gilt.

   (b) Die Folge der gebrochenen Anteile $\{n\alpha\}$ ist genau dann gleichverteilt, wenn α irrational ist.

   (c) Die Folge $\{n! \cdot e\}$ ist nicht gleichverteilt. (10 Punkte)

3. Zeige:

   (a) Für die von- Mangoldt- Funktion Λ gilt

   $$\Lambda(n) = \sum_{b|n} \mu(b) \cdot \log \frac{n}{b}.$$

   (b) Es seien $y, z \ge 1$ und $n > z$. Dann gilt

   $$\Lambda(n) = \sum_{\substack{b|n \\ b \le y}} \mu(b) \cdot \log \frac{n}{b} - \sum_{\substack{bc|n \\ b \le y,\ c \le z}}\sum \mu(b)\Lambda(c) + \sum_{\substack{bc|n \\ b > y,\ c > z}}\sum \mu(b)\Lambda(c).$$

   <u>*Hinweis:*</u>
   Benutze Teilaufgabe a) und folgende Umformungen:

   $$\begin{aligned} \sum_{\substack{b|n \\ b>y}} \mu(b) \cdot \log \frac{n}{b} &= \sum_{\substack{bc|n \\ b>y}}\sum \mu(b)\Lambda(c) \\ \sum_{\substack{bc|n \\ b>y,\ c\le z}}\sum \mu(b)\Lambda(c) &= \sum_{\substack{bc|n \\ c\le z}}\sum \mu(b)\Lambda(c) - \sum_{\substack{bc|n \\ b\le y,\ c\le z}}\sum \mu(b)\Lambda(c). \end{aligned}$$

   (c) Es sei p_n die n- te Primzahl und α irrational. Dann ist die Folge $\{p_n \cdot \alpha\}$ auf $[0,1)$ gleichverteilt. (10 Punkte)

Wir wünschen Euch allen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr 2016!