ulm university universität ulm

Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 26. Januar 2016, vor den Übungen

1. (a) Es sei

$$D(s) := s \cdot \int_1^\infty (\psi(u) - u) \cdot u^{-s-1}\, du,$$

und es gelte $\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^\vartheta)$ mit $0 < \vartheta < 1$.

Zeige, dass dann $D(s)$ für $\Re(s) > \vartheta$ holomorph ist.

(b) Besitzt $\zeta(s)$ eine Nullstelle ρ mit $\Re(\rho) = \eta$, so ist die Abschätzung $\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^\vartheta)$ für $\vartheta < \eta$ falsch. (12 Punkte)

2. Es sei $N \geq 1$ und $\Re(s) \geq 1$.

(a) Drücke

$$\zeta(s) - (1 + 2^{-s} + \ldots + N^{-s})$$

mittels der Eulerschen Summenformel aus und zeige, dass der dabei entstehende Ausdruck für $\Re(s) > 0$ meromorph ist.

(b) Es sei $s = \sigma + i\gamma$ mit $\gamma \geq 2$.

Wähle $N = \gamma$ in Teilaufgabe a) und zeige, dass

$$\zeta(s) = O(\log \gamma)$$

für $\gamma \geq 1 - \frac{1}{\log \gamma}$ gilt.

(c) Zeige mittels der Cauchyschen Integralformel, dass

$$\zeta'(s) = O(\log^2 \gamma)$$

für $\gamma \geq 1 - \frac{1}{2 \log \gamma}$ gilt. (12 Punkte)