Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Dienstag, 2. Februar 2016, vor den Übungen

1. (Primzahlsatz ohne Borel- Carathéodory)
Zeige:

   (a) Die für $\sigma > 1$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$ definierte Funktion $F(\sigma) = \log \zeta(s)$ kann zu einer in $\Re(s) > 1$ mit $s = \sigma + it$ holomorphen Funktion fortgesetzt werden.

   (b) Für $\sigma > 1$ und $t > 0$ gilt
$$|\zeta(\sigma)|^3 \cdot |\zeta(\sigma + it)|^4 \cdot |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1.$$

   (c) Es sei $\sigma - 1 = (\log(t + 2))^{-A}$ mit $A > 0$. Es existiert eine Konstante $c_1 > 0$ mit
$$|\zeta(\sigma + it)| \geq c_1 \cdot (\log(t + 2))^{-3/4A-1/4}.$$

   Hinweis:
   Nutze die Abschätzung von Aufgabe 2 von Übungsblatt 12 für $|\zeta(\sigma+2it)|$ und Teilaufgabe b).

   (d) Es sei $\sigma \geq 1 - c_2 \cdot (\log(|t| + 2))^{-10}$. Dann gibt es eine Konstante $c_2 > 0$, so dass zum einen $\zeta(\sigma + it) \neq 0$ und zum anderen
$$\left| \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) \right| \leq (\log(|t| + 2))^9$$
gilt.

   Hinweis:
   Nutze die Abschätzung von Aufgabe 2 von Übungsblatt 12 für $|\zeta'(\sigma + it)|$ und Teilaufgabe c).

   (e) Es gibt eine Konstante $c_3 > 0$ mit $\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x \exp(-c_3(\log x)^{1/10}))$. (12 Punkte)

2. ($\zeta(1 + it) \neq 0$ mit Brunschem Sieb- I. Teil)
Es sei $t > 0$.

   (a) Zeige, dass für $\sigma > 1$
$$-\log |\zeta(\sigma + it)| = \sum_{p \in \mathbb{P}} \log |1 - p^{-\sigma-it}|$$
sowie $-\log |\zeta(\sigma)| = \log(\sigma - 1) + O(1)$ für $\sigma \to 1^+$ gilt.

   (b) Für $P \geq 2$ und $\sigma \geq 1$ sei $P^{it} := \cos(2\pi\vartheta) + i \sin(2\pi\vartheta)$ mit $\vartheta \in (-1/2, 1/2]$ sowie
$$F(\vartheta) = F(\vartheta, P, \sigma) := |1 - P^{-(\sigma+it)}|^2 = (1 - P^{-\sigma} \cos(2\pi\vartheta))^2 + P^{-2\sigma}(\sin(2\pi\vartheta))^2.$$
Zeige, dass eine absolute Konstante P_0 existiert, so dass für $P \geq P_0$ folgende Aussagen gelten:

      i. In $\vartheta = 0$ besitzt $F(\vartheta)$ ein Minimum.

      ii. Die Funktion F ist in $(-1/2, 0)$ monoton fallend und in $(0, 1/2)$ monoton steigend.

(12 Punkte)