Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 2. Februar 2016, vor den Übungen

1. ($\zeta(1+it) \neq 0$ mit Brunschem Sieb- II. Teil)
   Fortsetzung von Aufgabe 2 von Übungsblatt 13:

   (a) Zeige, dass ein P_0 existiert, so dass für alle $P > P_0$ folgende Aussage gilt:
   Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, so dass
   $$F(\vartheta, P, \sigma) \geq F(0, P, \sigma) + \delta P^{-\sigma}$$
   für $\epsilon \leq |\vartheta| \leq \frac{1}{2}$ gilt.

   (b) Für $k \in \mathbb{N}$ sei
   $$I_k := \left[\exp\left(\frac{(k-1/2)\cdot 2\pi}{t}\right), \exp\left(\frac{(k+1/2)\cdot 2\pi}{t}\right)\right],$$
   und für $c > 0$ sei
   $$J_k := \left[\exp\left(\frac{k\cdot 2\pi}{t} - c\right), \exp\left(\frac{k\cdot 2\pi}{t} + c\right)\right].$$
   Zudem sei $\pi(I_k)$ bzw. $\pi(J_k)$ die Anzahl der Primzahlen in I_k bzw. J_k.
   Zeige, dass eine absolute Konstante $C_0 > 0$ existiert, so dass
   $$\pi(J_k) \leq C_0 \cdot c \cdot \exp\left(\frac{k\cdot 2\pi}{t}\right) \cdot k^{-1}$$
   gilt.

   (c) Es sei $\eta > 0$ sowie
   $$\begin{aligned} K(\eta) &= \left\{k \colon \pi(I_k) \leq \eta \cdot \exp\left(\frac{k\cdot 2\pi}{t}\right) \cdot k^{-1}\right\} \\ L(\eta) &= \mathbb{N}\backslash K(\eta). \end{aligned}$$
   Zeige, dass eine absolute Konstante $C_1 > 0$ existiert, so dass
   $$\sum_{k\in K(\eta)} \sum_{I_k} P^{-\sigma} \leq C_1 \cdot \eta \cdot \log \frac{1}{\sigma - 1}$$
   gilt.

   <u>*Hinweis:*</u>
   Zeige zuerst
   $$\sum_{I_k} P^{-\sigma} \leq C_2 \cdot \eta \cdot \exp\left((1-\sigma)\cdot \frac{k\cdot 2\pi}{t}\right) \cdot k^{-1}$$
   mit einer absoluten Konstanten $C_2 > 0$.
   Verwende dann
   $$\int_{P_0}^{\infty} \frac{u^{-\sigma}}{\log u}\, du = O\left(\log \frac{1}{\sigma - 1}\right).$$

(d) Zeige, dass die Konstanten c in Teilaufgabe b) und η in Teilaufgabe c) so gewählt werden können, dass für $k \in L(\eta)$

$$\sum_{P \in I_k} \log \left|1 - P^{-\sigma - it}\right| \leq (1 - \omega) \cdot \sum_{P \in I_k} \log \left|1 - P^{-\sigma}\right|$$

für $\omega = \omega(t) > 0$.

<u>*Hinweis:*</u>
Verwende die Ergebnisse der Teilaufgaben a) und b).

(e) Zeige, dass ein $\tau = \tau(t) > 0$ existiert, so dass

$$\log |\zeta(\sigma + it)| \leq (1 - \tau) \cdot \log \frac{1}{\sigma - 1}$$

für $1 < \sigma < \sigma_0$ existiert.
Folgere daraus $\zeta(1 + it) \neq 0$. (24 Punkte)