# Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 3. November 2015, vor den Übungen

1. Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace ist die folgende:
*Es sei eine endliche Menge $\Omega$ gegeben. Unter einem Ereignis $E$ versteht man eine Teilmenge $E \subseteq \Omega$. Unter der Wahrscheinlichkeit $P(E)$ des Ereignisses $E$ versteht man $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$.*
*Ereignisse $E_1, \ldots, E_m$ von $\Omega$ heißen unabhängig, wenn für $\{j_1, \ldots, j_l\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ die Aussage*
$$P(E_{j_1} \cap \ldots \cap E_{j_l}) = \prod_{h=1}^{l} P(E_{j_h})$$
*gilt.*

   (a) Es sei $D = p_1 \cdots p_r$ mit $p_1 < \ldots < p_r$ Primzahlen sowie $k \in \mathbb{N}$ und $\Omega = \{1, \ldots, kD\}$. Für jedes $p_i$ mit $1 \leq i \leq r$ sei eine Menge $\mathcal{R}_i = \{n_1^{(i)}, \ldots, n_{\omega(p_i)}^{(i)}\}$ von $\omega(p_i)$ ganzen Zahlen vorgegeben, die paarweise inkongruent modulo $p_i$ sind.
   Das Ereignis $E_i$ sei durch $E_i = \{n \in \Omega \colon n \not\equiv n_i \bmod p_i,\ \forall n_i \in \mathcal{R}_i\}$ gegeben.
   Zeige, dass die $E_i$ mit $1 \leq i \leq r$ unabhängige Ereignisse sind und dass insbesondere
   $$P(E_1 \cap \ldots \cap E_r) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{\omega(p_i)}{p_i}\right)$$
   gilt.

   (b) Es sei $N \in \mathbb{N}$ und $\Omega = \{1, \ldots, N\}$. Für jede Primzahl $p \leq (\log N)^2$ sei $E(p) = \{n \leq N \colon p | n\}$. Zeige, dass ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für $N \geq N_0$ die Ereignisse $E(p)$ nicht unabhängig sind. (8 Punkte)

2. Die Bezeichnungen seien wie in der Vorlesung gewählt.
Es sei $\mathcal{P}(n) = n^3 + 2n + 2$, $\mathcal{A} = \{\mathcal{P}(n) \colon n \leq x\}$ und $X = x$.
Für $p \in \mathbb{P}$ sei
$$\rho(p) := |\{m \colon 0 \leq m \leq p-1,\ \mathcal{P}(m) \equiv 0 \bmod p\}|.$$

   (a) Zeige $\rho(p) \leq 3$.

   (b) Finde eine multiplikative Funktion $\omega$, die durch $\rho$ ausgedrückt werden darf, so dass für alle $d$ mit $\mu^2(d) = 1$
   $$|\mathcal{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d} \cdot X + R_d$$
   mit $|R_d| \leq 3^{\nu(d)}$ gilt.

   (c) Finde eine rationale Zahl $c$, so dass $S(\mathcal{A}, \mathbb{P}, 10) = c \cdot x + O(1)$ für $x \to \infty$ gilt.

   (d) Bestimme $R_d$ für $x = 720$ und $d = 35$. (16 Punkte)