Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 1. Dezember 2015, vor den Übungen

1. (a) Wir setzen Aufgabe 2 von Übungsblatt 6 hier fort. Die Bezeichnungen seien wie in den Abschnitten 1.3 und 1.4. Für feste Konstanten $A \geq 1$ und $B \geq 1$ sei $\omega(p) \leq A$ und

$$|\mathcal{A}_d| \leq \frac{X}{d} \cdot B^{\nu(d)},$$

falls $p|d \Rightarrow p \in \mathcal{P}$, $\mu^2(d) = 1$ gilt. Es sei zudem

$$\sum_{\substack{d \leq X^{1/2} \\ p|d \Rightarrow p \in \mathcal{P}}} \mu^2(d)|R_d| = O(X^{3/4})$$

sowie $z = \exp\left(c_0 \frac{\log X}{\log\log X}\right)$. Weiter sei $h_1(d) = X^{-1}|\mathcal{A}_d|$, $h_2(d) = X^{-1}|R_d|$ und $h_3(d) = \frac{\omega(d)}{d}$. Für $k \in \mathbb{N}_0$, $l \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1,2,3\}$ sei

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_{0,l}^{(i)} &= \sum_{\substack{X^{1/2}2^l < d \leq X^{1/2}2^{l+1} \\ d|P(z)}} h_i(d) \\ \sum\nolimits_{k,l}^{(i)} &= \sum_{\substack{X^k 2^l < d \leq X^k 2^{l+1} \\ d|P(z)}} h_i(d). \end{aligned}$$

Zeige mit Aufgabe 2 b) von Übungsblatt 6, dass es positive Konstanten $c_1 = c_1(A, B)$ und $c_2 = c_2(A, B)$ mit

$$\sum\nolimits_{k,l}^{(i)} \leq \exp\left(-c_1(k+1) \cdot \frac{\log X}{\log z} + c_2 \log\log X\right)$$

gibt.

(b) Zeige, dass zu einem $D > 0$ ein $c_0 = c_0(D)$ existiert, so dass

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = XW(z) \cdot \left(1 + O_D\left((\log X)^{-D}\right)\right)$$

gilt.

Hinweis:
Beginne mit der Formel des Siebes von Erathosthenes:

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \sum_{d|P(z)} \mu(d)|\mathcal{A}_d|$$

spalte die Summe in

$$\sum\nolimits_I = \sum_{\substack{d|P(z) \\ d \leq X^{1/2}}} \mu(d)|\mathcal{A}_d| \quad \text{und} \quad \sum\nolimits_{II} = \sum_{\substack{d|P(z) \\ d > X^{1/2}}} \mu(d)|\mathcal{A}_d|$$

auf. Verwende die Approximation $|\mathcal{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d}X + R_d$, die Bedingungen aus Teilaufgabe a) sowie die Aufspaltung in Summen der ebenfalls in Teilaufgabe a) betrachteten Art.

(c) Zeige mittels den Ergebnissen von Teilaufgabe c)

$$\pi_2(x) = O\left(x \cdot \frac{(\log\log x)^2}{(\log x)^2}\right).$$

(10 Punkte)

2. Gib eine Wertetafel für die Dirichletcharaktere modulo 8 an. (4 Punkte)

3. Es sei p_i die i- te Primzahl und $d_i = p_{i+1} - p_i$. Wir definieren

$$\begin{aligned} f(n) &:= |\{p_i \leq x \colon p_{i+1} - p_i = d_i = n\}| \quad \text{und} \\ g(n) &:= \prod_{p \mid n} \left(1 + \frac{1}{p}\right). \end{aligned}$$

In den folgenden Teilaufgaben bedeute $c_0, c_1, c_2, \ldots$ jeweils eine absolute Konstante, deren Existenz zu zeigen ist.

Zeige:

(a) Für $x \geq 2$ gilt

$$f(n) \leq c_0 \cdot \frac{x}{\log^2 x} \cdot g(n).$$

(b) Es ist

$$\sum_{n \leq x} g^2(n) \leq c_1 \cdot \sum_{\substack{m \leq x \\ \mu^2(m)=1}} \frac{2^{\nu(m)}}{m} \cdot \left[\frac{x}{m}\right].$$

(c) Für $m \geq 10$ gilt

$$\nu(m) \leq \exp\left(c_2 \cdot \frac{\log m}{\log\log m}\right)$$

(d) Es gilt

$$\sum_{\mu^2(m)=1} \frac{2^{\nu(m)}}{m^2} < \infty.$$

(e) Es gilt

$$\sum_{n \leq x} g^2(n) < c_3 \cdot x.$$

(10 Punkte)