Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Dienstag, 8. Dezember 2015, vor den Übungen

1. Es sei $q \in \mathbb{N}$ ungerade, $m, l \in \mathbb{Z}$, $0 < \Delta < 1$ und $0 \leq l - \Delta q \leq l < m \leq m + \Delta q \leq q$.
   Wir definieren die Funktion $\mathrm{Ch}_0 = \mathrm{Ch}_0(\cdot; l, m, q) \colon G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +) \to \mathbb{C}$ durch

$$\mathrm{Ch}_0(r \bmod q) = \begin{cases} 1, & \text{falls } l \leq r \leq m, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

   und die Funktion $\mathrm{Ch}_1 = \mathrm{Ch}_1(\cdot; l, m, q, \Delta) \colon G \to \mathbb{C}$ durch

$$\mathrm{Ch}_1(r \bmod q) = (\Delta q)^{-1} \sum_{1 \leq u \leq \Delta q} \mathrm{Ch}_0(r \bmod q; l - u, m + u, q).$$

   (a) Berechne die Fourierreihenentwicklung

$$\mathrm{Ch}_1(r \bmod q) = \sum_{-\frac{q}{2} < n < \frac{q}{2}} c(n) e\left(n \cdot \frac{r}{q}\right)$$

   von Ch_1 und zeige, dass eine positive von Δ, l, m und q unabhängige Konstante $C_1 > 0$ existiert, so dass $|c(n)| \leq C_1 \Delta^{-1} n^{-2}$ gilt.

   (b) Für $A > 1$ sei

$$\mathrm{Ch}_2(r \bmod q; A) = \sum_{|n| \leq A} c(n) e\left(n \cdot \frac{r}{q}\right).$$

   Zeige, dass zu jedem $\epsilon > 0$ ein von q unabhängiges $A = A(\epsilon)$ existiert, so dass für alle $r \bmod q \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ dann $|\mathrm{Ch}_1(r \bmod q) - \mathrm{Ch}_2(r \bmod q; A)| < \epsilon$ gilt.

   (c) Für $\alpha \in [0, 1)$ setzen wir

$$\mathrm{Ch}(\alpha; A) = \sum_{|n| \leq A} c(n) e(n\alpha).$$

   Es sei $\frac{r}{q} \leq \alpha < \frac{r+1}{q}$. Zeige, dass es eine von q, r, l, m, Δ und A unabhängige Konstante $C_2 > 0$ gibt, so dass $|\mathrm{Ch}(\alpha; A) - \mathrm{Ch}_2(r \bmod q; A)| < C_2 A^2 q^{-1}$ gilt.

   (d) Es sei C die Menge aller auf $\mathbb{C}^*$ stetigen Funktionen. Durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(e(t)) \overline{g(e(t))} \, dt$$

   wird C zu einem unitären Vektorraum. Dies ist offensichtlich und braucht nicht bewiesen zu werden. Es sei

$$F := \left\{ P \colon \mathbb{C}^* \to C,\ P(e(\alpha)) = \sum_{n=-N}^{N} a(n) e(n\alpha),\ N \in \mathbb{N}_0, a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

   der Unterraum aller Fourierpolynome.
   Zeige, dass F dicht in C liegt. (14 Punkte)

2. Es sei
$$\mathrm{li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

(a) Zeige, dass für $N \in \mathbb{N}$
$$\mathrm{li}(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} + \ldots + (N-1)! \cdot \frac{x}{(\log x)^N} + O_N\left(\frac{x}{(\log x)^{N+1}}\right)$$
für $x \to \infty$ gilt.

(b) Eine schärfere Form des Primzahlsatzes besagt:
Es gibt ein $c_1 > 0$, so dass
$$\psi(x) = x + O\left(x \cdot \exp(-c_1(\log x)^{1/2})\right)$$
für $x \to \infty$ gilt. Folgere daraus, dass ein $c_2 > 0$ existiert, so dass
$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(x \cdot \exp(-c_2(\log x)^{1/2})\right)$$
für $x \to \infty$ gilt.

(c) Gauß bzw. Legendre haben folgende Approximation π_G bzw. π_L für $\pi(x)$ vorgeschlagen:
$$\pi_G = \frac{x}{\log x - 1} \quad \text{bzw.} \quad \pi_L(x) = \frac{x}{\log x - A}$$
mit $A = 1{,}083$. Welches ist die bessere Approximation? (10 Punkte)