Vorabskript zur Vorlesung

Analytische Zahlentheorie

Wintersemester 2015/ 16

Prof. Dr. Helmut Maier
Hans- Peter Reck

Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie
Universität Ulm

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Siebmethoden und elementare Primzahltheorie

1.1 Arithmetische Funktionen und Möbiussche Umkehrformel

Definition 1.1.1. Eine arithmetische Funktion ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ von den natürlichen Zahlen in die komplexen Zahlen.
Eine arithmetische Funktion f heißt additiv, falls $f(mn) = f(m) + f(n)$ für $ggT(m, n) = 1$ ist bzw. multiplikativ, falls $f(1) = 1$ und $f(mn) = f(m)f(n)$ für $ggT(m, n) = 1$ ist. Vollständig additiv bzw. vollständig multiplikativ heißt f, falls die Gleichungen $f(mn) = f(m)+f(n)$ bzw. $f(mn) = f(m)f(n)$ auch ohne die Zusatzbedingung $ggT(m, n) = 1$ gelten.

Im folgenden werden einige Beispiele arithmetischer Funktionen definiert:

Definition 1.1.2.

1. In der Analysis vorkommende Besipiele vollständig additiver bzw. multiplikativer Funktionen sind $\log n$ bzw. n^α für $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Die Funktion
$$\epsilon(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad n = 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
ist vollständig multiplikativ.

3. Die Funktion 1 mit $1(n) := 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist ebenfalls vollständig multiplikativ.

4. Es sei $\Omega(n) := \sum_{p^\alpha | n} \alpha$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n (mit Vielfachheit gezählt) und $\omega(n) := \sum_{p|n} 1$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n.
Dann ist Ω vollständig additiv und ω additiv.

5. Die Eulersche φ- Funktion ist multiplikativ.

6. Die Möbiusfunktion μ ist durch
$$\mu(n) := \begin{cases} (-1)^{\omega(n)}, & \text{falls } n \text{ quadratfrei ist,} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
definiert. Wir werden zeigen, dass μ multiplikativ ist.

7. Die Teilerfunktion $\tau(n) := \sum_{d|n} 1$, die Anzahl der (positiven) Teiler von n, ist, wie wir zeigen werden, multiplikativ.

Definition 1.1.3. Es seien f und g arithmetische Funktionen. Unter der Faltung $f \star g$ von f und g versteht man die arithmetische Funktion

$$(f \star g)(n) := \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Unter der Summe $f + g$ von f und g versteht man die arithmetische Funktion

$$(f + g)(n) := f(n) + g(n).$$

Beispiel 1.1.1. Es ist $\tau(n) = \sum_{d|n} 1 = \sum_{d|n} 1(d) \cdot 1(\frac{n}{d})$, also $\tau = 1 \star 1$.

Satz 1.1.1. *Die Menge A aller arithmetischen Funktionen bildet mit der Addition und der Faltung als Multiplikation einen kommutativen Ring mit Einselelement ϵ.*

Beweis. Die Menge A bildet offenbar unter der Addition von Funktionen eine abelsche Gruppe. Das Distributivgesetz $f \star (g + h) = (f \star g) + (f \star h)$ ist klar.
Es bleibt die Kommutativität und Assoziativität der Faltung zu zeigen, sowie dass ϵ Einselement ist:

- Es ist $(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d})$. Durchläuft d alle Teiler von n, so auch $d' = \frac{n}{d}$. Also ist

$$(f \star g)(n) = \sum_{d'|n} f\left(\frac{n}{d'}\right) g(d') = (g \star f)(n).$$

- Es seien f, g, h arithmetische Funktionen. Dann ist

$$\begin{aligned} ((f \star g) \star h)(n) &= \sum_{d|n} (f \star g)(d) \cdot h\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \sum_{d_1|d} f(d_1) g\left(\frac{d}{d_1}\right) h\left(\frac{n}{d}\right) \\ &\underset{d=d_1d_2,\, \frac{n}{d}=d_3}{=} \sum_{\substack{d_1,d_2,d_3 \\ d_1d_2d_3=n}} f(d_1) g(d_2) h(d_3). \end{aligned}$$

  Derselbe Ausdruck ergibt sich für $(f \star (g \star h))(n)$. Also ist $(f \star g) \star h) = f \star (g \star h)$.

- Es ist

$$(\epsilon \star g)(n) = \sum_{d|n} \epsilon(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \epsilon(1) f(n) = f(n).$$

  Also ist $\epsilon \star f = f$.

□

Satz 1.1.2. *Die Faltung zweier multiplikativer Funktionen ist multiplikativ.*

Beweis. Es seien $f, g \in A$ multiplikativ und $F = f \star g$. Es gelte $ggT(m, n) = 1$. Dann ist

$$F(mn) = \sum_{\substack{d_1,d_2 \\ d_1d_2=mn}} f(d_1) g(d_2).$$

Wir schreiben $d_1 = e_1e_2$ mit $e_1 = ggT(d_1, m)$ und $e_2 = ggT(d_1, n)$ sowie analog $d_2 = e_3e_4$ mit $e_3 = ggT(d_2, m)$ und $e_4 = ggT(d_2, n)$. Dies ist bei gegebenem d_1 und d_2 auf genau eine Art möglich. Dann ist $e_1e_3 = m$ und $e_2e_4 = n$.

Also ist wegen der Multiplikativität von f und g

$$\begin{aligned} F(mn) &= \sum_{\substack{e_1,e_2,e_3,e_4 \\ e_1e_3=m, e_2e_4=n}} f(e_1e_2)g(e_3e_4) = \sum_{\substack{e_1,e_2,e_3,e_4 \\ e_1e_3=m, e_2e_4=n}} f(e_1)f(e_2)g(e_3)g(e_4) \\ &= \sum_{\substack{e_1,e_3 \\ e_1e_3=m}} f(e_1)g(e_3) \sum_{\substack{e_2,e_4 \\ e_2e_4=n}} f(e_2)g(e_4) = F(m)\cdot F(n). \end{aligned}$$

□

Satz 1.1.3. *Die Teilerfunktion ist multiplikativ.*

Beweis. Aus Satz 1.1.2 ergibt sich mit $\tau = 1\star 1$ ein Beweis für die Multiplikativität der Teilerfunktion. □

Beispiel 1.1.2. Es sei $\sigma_k(n) := \sum\limits_{d|n} d^k$. Daraus folgt $\sigma_k = f \star 1$ mit $f(n) = n^k$.
Nach Satz 1.1.2 ist σ_k multiplikativ.

Satz 1.1.4. *Es ist $\mu \star 1 = \epsilon$.*

Beweis. Nach Satz 1.1.2 ist $\mu \star 1$ multiplikativ. Es bleibt, die Werte von $\mu \star 1$ für Primzahlpotenzen zu bestimmen: Für $\alpha \geq 1$ ist

$$(\mu \star 1)(p^\alpha) = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \mu\left(p^\beta\right) = 1 + \mu(p) = 0.$$

Also ist $\mu \star 1 = \epsilon$. □

Satz 1.1.5. *(Möbiussche Umkehrformel)*
Es seien f und g arithmetische Funktionen. Die folgenden Beziehungen sind äquivalent:

(i) $F(n) = \sum\limits_{d|n} f(d)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$

(ii) $f(n) = \sum\limits_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$

Beweis. "$\Rightarrow$":
Nach der Definition der Faltung haben wir $F = 1 \star f$. Daraus folgt nach Satz 1.1.1 und 1.1.3

$$\mu \star F = \mu \star (1 \star f) = (\mu \star 1) \star f = \epsilon \star f = f.$$

Also ist $\sum_{d|n} \mu(d) F(\frac{n}{d}) = f(n)$.

"$\Leftarrow$":
Es ist also $\mu \star F = f$. Dann ist

$$f \star 1 = 1 \star (\mu \star F) = (1 \star \mu) \star F = \epsilon \star F = F,$$

also $\sum_{d|n} f(d) = F(n)$. □

Satz 1.1.6. *(2. Möbiussche Umkehrformel)*
Die Funktionen F und G seien auf $[1, \infty)$ definiert. Dann sind folgende Beziehungen äquivalent:

(i) $F(x) = \sum_{n \le x} G\left(\frac{x}{n}\right)$ *für* $x \ge 1$

(ii) $G(x) = \sum_{n \le x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right)$ *für* $x \ge 1$

Beweis. Übungen □

1.2 Grundlagen aus der elementaren Primzahltheorie

Definition 1.2.1. Die <u>Primzahlzählfunktion</u> $\pi(x)$ ist durch

$$\pi(x) := |\{p \in \mathbb{P} \colon p \le x\}| = \sum_{p \le x} 1$$

definiert. Der Summationsindex p bedeutet hier und im folgenden, dass über Primzahlen summiert wird.

Schon Euklid wusste, dass $\pi(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ gilt. Gauß vermutete um 1792 die Gültigkeit des sogenannten Primzahlsatzes:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty) \quad \text{d.h.} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} = 1.$$

Dies konnte jedoch erst 1896 von Hadamard und de la Vallée- Poussin gezeigt werden.
Wir werden den Beweis in dieser Vorlesung nicht geben. Uns genügen schwächere Ergebnisse, die mit denen von Tschebyschew zusammenhängen, der 1850 zuerst die wahre Größenordnung von $\pi(x)$ bestimmte.

Satz 1.2.1. *Es gibt Konstanten $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$, so dass für alle $x \ge x_0$*

$$c_1 \cdot \frac{x}{\log x} \le \pi(x) \le c_2 \cdot \frac{x}{\log x}$$

gilt.

Beweis. Übungen. □

Ergebnisse der Analytischen Zahlentheorie haben die Form

"Unbekannte Funktion = Hauptglied + Restglied"

oder "Unbekannte Funktion ≤ Explizite Funktion".
Zur Vereinfachung der Formulierung hat Edmund Landau die nach ihm benannten O- und o- Symbole eingeführt.

Definition 1.2.2. Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Funktionen, die für genügend große positive x definiert sind, und es sei $f(x)$ beliebig, $g(x) > 0$ eventuell nur für genügend große x. Dann soll

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{bzw.} \quad f(x) = o(g(x)) \quad (x \to \infty)$$

bedeuten, dass für genügend große x folgendes gilt:

$$|f(x)| \leq A \cdot g(x) \quad \text{für passendes } A > 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \underset{x\to\infty}{\to} 0.$$

Analog mögen die Beziehungen

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{bzw.} \quad f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a^+) \quad \text{oder} \quad (x \to a^-)$$

definiert sein, wobei $g(x) > 0$ für x nahe bei a vorausgesetzt ist.

Satz 1.2.2. *Der Primzahlsatz kann in der Form*

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right) \quad (x \to \infty) \quad \textit{oder auch} \quad \pi(x) = \frac{x}{\log x} \cdot (1 + o(1)) \quad (x \to \infty)$$

geschrieben werden.

Satz 1.2.3. *(Mertens)*
Es gilt

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1) \quad (x \to \infty).$$

Beweis. Es sei $N = [x]$, und wir untersuchen die Primfaktorzerlegung von $N!$. Es sei $N! = \prod_{p \leq N} p^{\gamma(p)}$. Zur Bestimmung des Exponenten $\gamma(p)$ beachten wir, dass von den Zahlen $1, \ldots, N$ genau $\left[\frac{x}{p}\right]$ durch p teilbar sind, $\left[\frac{x}{p^2}\right]$ durch p^2 usw. Damit gilt

$$\gamma(p) = \left[\frac{x}{p}\right] + \left[\frac{x}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{x}{p^{r(p)}}\right] = \frac{x}{p} + O(1) + O\left(\frac{x}{p^2}\right)$$

mit $r(p) = \frac{\log x}{\log p}$.

Somit folgt wegen $\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$

$$\log N! = x \cdot \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} + O(x).$$

Mittels der Stirlingschen Formel $\log N! = N \cdot \log N - N + O(\log N)$ folgt

$$x \cdot \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = x \log x + O(x)$$

und damit

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

$\square$

Von Interesse ist auch die Summe $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$. Diese erhält man, indem man aus der Summe $\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p}$ die "Gewichte" $\log p$ entfernt.
Eine Methode zur Entfernung oder Hinzufügung regulärer Gewichte liefert die Abelsche Partielle Summation.

Satz 1.2.4. *(Abelsche Partielle Summation)*
Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $c_1, , c_2, \ldots$ komplexe Zahlen. Weiter sei $c(x) = \sum_{a<n\leq x} c_n$. Dann gilt

i) diskrete Version:
Es seien $f_1, \ldots, f_n$ komplexe Zahlen mit $(\Delta f)_n = f_{n+1} - f_n$. Dann gilt

$$\sum_{a<n\leq b} c_n f_n = c(b) f_{[b]} - \sum_{a<n\leq b-1} c(n)(\Delta f)_n.$$

ii) kontinuierliche Version:
Es sei f auf $[a, b]$ stetig differenzierbar. Dann ist

$$\sum_{a<n\leq b} c_n f(n) = c(b) f(b) - \int_a^b c(t) f'(t)\, dt.$$

Beweis. i) Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{a<n\leq b} c_n f_n &= \sum_{a<n\leq b} (c(n) - c(n-1)) \cdot f_n = \sum_{a<n\leq b} c(n) f_n - \sum_{a<n\leq b-1} c(n) f_{n+1} \\ &= c(b) f_{[b]} - \sum_{a<n\leq b-1} c(n)(f_{n+1} - f_n). \end{aligned}$$

Dies beweist (i).

ii) Es seien die Voraussetzungen von Teil ii) erfüllt. Zudem setzen wir $f_n := f(n)$. Für $t \in [n, n+1)$ ist $c(t) = c(n)$, und es gilt

$$f_{n+1} - f_n = \int_n^{n+1} f'(t)\, dt,$$

also

$$c(n) \cdot (f_{n+1} - f_n) = \int_n^{n+1} c(t) f'(t)\, dt. \tag{1}$$

Außerdem ist

$$c(b) f(b) - c([b]) f_{[b]} = \int_{[b]}^b c(t) f'(t)\, dt. \tag{2}$$

Damit folgt aus i), (1) und (2)

$$\sum_{a<n\leq b} c_n f_n = c(b) f(b) - (c(b) f(b) - c([b]) f([b])) - \int_a^{[b]} c(t) f'(t)\, dt = c(b) f(b) - \int_a^b c(t) f'(t)\, dt.$$

□

Satz 1.2.5. *Es gibt eine Konstante $b \in \mathbb{R}$ mit*

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + b + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Beweis. Wir wenden Satz 1.2.4 ii) mit

$$c_n = \begin{cases} \frac{\log p}{p}, & \text{falls } n = p \in \mathbb{P} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $f(t) = \frac{1}{\log t}$ sowie $a = \frac{3}{2}$ an. Wir erhalten

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} \cdot \frac{1}{\log p} = \left(\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} \right) \cdot \frac{1}{\log x} + \int_{3/2}^{x} \left(\sum_{p \le t} \frac{\log p}{p} \right) \frac{dt}{t \log^2 t}.$$

Nach Satz 1.2.3 ist $\sum_{p \le t} \frac{\log p}{p} = \log t + r(t)$ mit $r(t) = O(1)$. Also gilt

$$\begin{aligned} \sum_{p \le x} \frac{1}{p} &= (\log x + r(x)) \cdot \frac{1}{\log x} + \int_{3/2}^{x} \frac{dt}{t \log t} + \int_{3/2}^{x} \frac{r(t)}{t \log^2 t}\, dt \\ &= 1 + \frac{r(x)}{\log x} + \log\log x - \log\log \frac{3}{2} + \int_{3/2}^{\infty} \frac{r(t)}{t \log^2 t}\, dt + O\left(\frac{1}{\log x} \right) \\ &= \log\log x + b + O\left(\frac{1}{\log x} \right) \end{aligned}$$

mit

$$b = 1 - \log\log \frac{3}{2} + \int_{3/2}^{\infty} \frac{r(t)}{t \log^2 t}\, dt.$$

□

1.3 Formulierung des allgemeinen Siebproblems

In den Bezeichnungen folgen wir hier weitgehend dem Buch "Sieve methods" von Halberstam und Richert. Auch die Ergebnisse sind diesem Buch entnommen.

Siebmethoden werden verwendet, um die Anzahl der Glieder einer endlichen Folge $\mathcal{A}$ von ganzen Zahlen abzuschätzen, die durch keine Primzahl p aus der Primzahlmenge $\mathcal{P}$ teilbar sind, die unter einer Schranke $z > 1$ liegen.

Definition 1.3.1. Es sei $\mathcal{A}$ eine endliche Folge ganzer Zahlen, die gegebene Werte mehrfach annehmen kann. Es sei $\mathcal{P}$ eine Menge von Primzahlen und $z \ge 2$ mit $z \in \mathbb{R}$. Die Menge aller Primzahlen sei $\mathbb{P}$. Dann definieren wir

$$S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z) = |\{a \in \mathcal{A} \colon p | a,\ p \in \mathcal{P} \Rightarrow p > z\}|$$

und $P(z) = \prod_{p<z} p$. In den Anwendungen wird die Folge $\mathcal{A}$ gewöhnlich von einem Parameter abhängen, der gegen unendlich strebt.
Man kann Ergebnisse über $S(\mathcal{A}; \mathcal{P}, z)$ unter Angaben sehr allgemeiner Art über die Folge $\mathcal{A}$ erhalten. Wir werden die Art dieser Informationen in der Folge beschreiben.
Für eine quadratfreie Zahl d sei $\mathcal{A}_d = \{a \in \mathcal{A} \colon a \equiv 0 \bmod d\}$ die Teilfolge der durch d teilbaren Zahlen. Über $\mathcal{A}$ benötigen wir Informationen der folgenden Art:
Für $X > 1$ und eine multiplikative Funktion ω_0 setzen wir für $\mu(d) \ne 0$

$$r_d := |\mathcal{A}_d| - \frac{\omega_0(d)}{d} X.$$

Von dem Restglied r_d wird gewünscht, dass es (wenigstens im Mittel) klein ist. Dann liefert X eine gute Approximation für die Mächtigkeit von $\mathcal{A}$, während Approximationen für $\mathcal{A}_d$ durch $\frac{\omega_0(d)}{d} X$ gegeben sind.

Beispiel 1.3.1. Es sei $\mathcal{A} = \{n \colon x - y < n \leq x\}$ mit $1 < y \leq x$. Dann liefert $S(\mathcal{A}, \mathbb{P}, z)$ obere Schranken für die Anzahl der Primzahlen im Intervall $[x - y, y]$. Falls $z \geq x^{1/2}$ ist, ergeben sich auch untere Schranken. Setzen wir $X = y$, $\omega_0(p) = 1$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und $\omega_0(d) = 1$ für quadratfreie d, so erhalten wir $|r_d| \leq 1$.

Beispiel 1.3.2. Es sei $\mathcal{A} = \{n^2 + 1 \colon n \leq x\}$. Die Teilbarkeit von $n^2 + 1$ durch ein quadratfreies d hängt nur von den Restklassen von $n \bmod d$ ab. Es sei $d = 2^\epsilon p_1 \cdots p_r$ die Zerlegung von d in Primfaktoren mit $\epsilon \in \{0, 1\}$ und $2 < p_1 < p_2 < \ldots < p_r$. Nach dem Chinesischen Restsatz ist die Kongruenz

$$n^2 + 1 \equiv 0 \bmod d \tag{1}$$

zum System der Kongruenzen

$$\begin{cases} n^2 + 1 \equiv 0 \bmod 2^\epsilon \\ n^2 + 1 \equiv 0 \bmod p_1 \\ \qquad \vdots \\ n^2 + 1 \equiv 0 \bmod p_r \end{cases} \tag{2}$$

äquivalent.
Für eine ungerade Primzahl p hat $n^2+1 \equiv 0 \bmod p$ zwei Lösungen modulo p, falls $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ gilt, also im Falle $p \equiv 1 \bmod 4$. Andernfalls besitzt $n^2+1 \equiv 0 \bmod p$ keine Lösung modulo p, falls $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$ gilt, also für $p \equiv 3 \bmod 4$. Für $p = 2$ hat $n^2 + 1 \equiv 0 \bmod p$ die eine Lösung $n \equiv 1 \bmod 2$.
Die Anzahl $l(d)$ der Lösungen von (1) ist somit durch

$$l(d) = \begin{cases} 0, & \text{falls } p | d \text{ für eine Primzahl } p \equiv 3 \bmod 4 \\ 2^r & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegeben. Letzteres bedeutet damit $d = 2^\epsilon p_1 \cdots p_r$, $\epsilon \in \{0, 1\}$ und $p_i \equiv 1 \bmod 4$ für $1 \leq i \leq r$.
Nun lässt sich dieses Intervall $[0, x]$ in $\left[\frac{x}{d}\right]$ Teilintervalle $I_k = [(k-1)d, kd)$ mit $1 \leq k \leq \left[\frac{x}{d}\right]$ der Länge d und im Falle $\frac{x}{d} \notin \mathbb{N}$ ein Teilintervall $I_{k+1} = [\left[\frac{x}{d}\right], x)$ der Länge kleiner d einteilen.
Jedes I_k mit $1 \leq k \leq \left[\frac{x}{d}\right]$ enthält $l(d)$ Elemente von $\mathcal{A}_d$, während I_{k+1} weniger als d enthält.

Somit folgt

$$|\mathcal{A}_d| = \left[\frac{x}{d}\right] \cdot l(d) + \theta_d \tag{3}$$

mit $0 \leq \theta_d < d$. Als geeigente Wahl für den Parameter X und die multiplikative Funktion ω_0 ergibt sich somit $X = x$ und $\omega_0 = l(d)$. Aus (3) ergibt sich somit für $r_d = |\mathcal{A}_d| - \frac{\omega_0}{d} \cdot X$ schließlich $|r_d| < d$.

Beispiel 1.3.3. Es sei $\mathcal{A} = \{n \cdot (n+2) \colon n \leq x\}$. Für $z = x^{1/2}$ ist $S(\mathcal{A}, \mathbb{P}, z) = \pi_2(x) + O(\sqrt{x})$, wobei $\pi_2(x) = |\{p \leq x - 2 \colon p + 2 \in \mathbb{P}\}|$ die Anzahl der Primzahlzwillinge kleiner gleich x bedeute. Für $z \leq x^{1/2}$ ergeben sich obere Schranken für $\pi_2(x)$.
Es sei $d = 2^\epsilon p_1 \cdots p_r$ die Zerlegung von d in Primfaktoren mit $\epsilon \in \{0, 1\}$ und $2 < p_1 < p_2 < \ldots < p_r$.
Wiederum ist nach dem Chinesischen Restsatz die Kongruenz

$$n^2 + 2n \equiv 0 \bmod d \tag{1}$$

zum System der Kongruenzen

$$\begin{cases} n^2 + 2n \equiv 0 \bmod 2^\epsilon \\ n^2 + 2n \equiv 0 \bmod p_1 \\ \qquad \vdots \\ n^2 + 2n \equiv 0 \bmod p_r \end{cases} \tag{2}$$

äquivalent.

Nun hat $n \cdot (n+2) \equiv 0 \bmod p$ die eine Lösung $n \equiv 0 \bmod 2$ für $p = 2$ und sonst die zwei Lösungen $n \equiv 0 \bmod p$ und $n \equiv -2 \bmod p$. Die Anzahl $l(d)$ der Lösungen von (1) ist somit 2^r. Wie im vorigen Beispiel 1.3.2 teilen wir das Intervall $[0, x]$ in $\left[\frac{x}{d}\right]$ Teilintervalle $I_k = [(k-1)d, kd)$ mit $1 \leq k \leq \left[\frac{x}{d}\right]$ der Länge d und möglicherweise ein zusätzliches Intervall der Länge kleiner d ein.
Jedes I_k mit $1 \leq k \leq \left[\frac{x}{d}\right]$ enthält $l(d)$ Elemente von $\mathcal{A}_d$, während I_{k+1} höchstens $l(d)$ enthält. Somit folgt

$$|\mathcal{A}_d| = \left[\frac{x}{d}\right] \cdot l(d) + \theta_d \tag{3}$$

mit $0 \leq \theta_d < l(d)$. Als geeigente Wahl für den Parameter X und die multiplikative Funktion ω_0 ergibt sich somit $X = x$ und $\omega_0 = l(d) = 2^r$, wobei r die Anzahl der ungeraden Primfaktoren von d darstellt.

1.4 Einschluss- Ausschluss- Prinzip, Einschluss- Ausschluss- Ungleichungen

Das Sieb des Erathosthenes, das einfachste Sieb, das wir im nächsten Abschnitt behandeln werden, ist eine zahlenthereotische Version des Einschluss- Ausschluss- Prinzips. Danach werden wir das Reine Brunsche Sieb behandeln, ein leistungsfähigeres Sieb, das auf der Einschluss- Ausschluss- Ungleichung beruht.

Satz 1.4.1. *Es seien $k, \nu \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sigma(\nu, k) := \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \binom{\nu}{m} = (-1)^{k-1} \binom{\nu - 1}{k-1}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach k durch.
Induktionsanfang: $k = 1$:
Die Behauptung folgt wegen

$$\sigma(\nu, 1) = \sum_{m=0}^{0} (-1)^m \binom{\nu}{m} = \binom{\nu}{0} = (-1)^{1-1} \binom{\nu - 1}{0}.$$

Induktionsschritt: $k \to k+1$:
Es gelte die Induktionyhypothese für ein $k \in \mathbb{N}$. Zudem gilt

$$\binom{\nu}{k} - \binom{\nu - 1}{k-1} = \binom{\nu - 1}{k}$$

und damit

$$\sigma(\nu, k+1) = (-1)^k \binom{\nu}{k} + \sigma(\nu, k) \underset{(IH)}{=} (-1)^k \cdot \left(\binom{\nu}{k} - \binom{\nu - 1}{k-1} \right) = (-1)^k \binom{\nu - 1}{k}.$$

$\square$

Für den Rest dieses Abschnitts treffen wir folgende Annahmen:
Es sei $\mathcal{M}$ eine endliche Menge von Objekten, $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_r$ seien Teilmengen von $\mathcal{M}$. Es sei $\mathcal{S}$ die Menge der Objekte von $\mathcal{M}$, die keiner der Teilmengen $\mathcal{M}_i$ angehören.

Satz 1.4.2. *(Einschluss- Ausschluss- Prinzip)*
Es gilt

$$|\mathcal{S}| = |\mathcal{M}| + \sum_{k=1}^{r} (-1)^k \cdot \sum_{(j_1,\ldots,j_k)} |\mathcal{M}_{j_1} \cap \ldots \cap \mathcal{M}_{j_k}|.$$

Bevor wir Satz 1.4.2 beweisen, fragen wir uns, was wir erhalten, wenn wir die Summe auf der rechten Seite nicht über sämtliche k, sondern nur über $1 \leq k \leq t$ mit $t \in \mathbb{N}$ und $t \leq r$ erstrecken.

Definition 1.4.1. Es sei $t \in \mathbb{N}_0$ mit $t \leq r$. Unter der Einschluss- Ausschluss- Summe $E(t)$ verstehen wir

$$E(t) := |\mathcal{M}| + \sum_{k=1}^{t} (-1)^k \cdot \sum_{(j_1,\ldots,j_k)} |\mathcal{M}_{j_1} \cap \ldots \cap \mathcal{M}_{j_k}|.$$

Wir werden nun sehen, dass wir für ungerade Werte von t eine untere Schranke und für gerade Werte von t eine obere Schranke für $|\mathcal{S}|$ erhalten.

Satz 1.4.3. *(Einschluss- Ausschluss- Ungleichungen)*
Es sei $s \in \mathbb{N}_0$. Dann haben wir

$$E(2s+1) \leq |\mathcal{S}| \leq E(2s).$$

Beweis. (Beweis der Sätze 1.4.2 und 1.4.3)
Es sei $\mathcal{M} = \{r_1, \ldots, r_l\}$. Für $1 \leq i \leq l$ sei $n(r_i)$ die Anzahl der Mengen $\mathcal{M}_j$ mit $r_i \in \mathcal{M}_j$. Wir erhalten durch die Änderung der Summationsreihenfolge

$$\begin{aligned} E(t) &= |\mathcal{M}| + \sum_{k=1}^{t} (-1)^k \cdot \sum_{(j_1,\ldots,j_k)} |\mathcal{M}_{j_1} \cap \ldots \cap \mathcal{M}_{j_k}| \\ &= \sum_{i=1}^{l} \left(1 + \sum_{1 \leq k \leq \min\{n(r_i),t\}} (-1)^k \cdot \sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_k) \\ r_i \in \mathcal{M}_{j_1} \cap \ldots \cap \mathcal{M}_{j_k}}} 1 \right). \end{aligned}$$

Es gibt $\binom{n(r_i)}{k}$ Möglichkeiten, aus den $n(r_i)$ Mengen, die r_i enthalten, die k Mengen $\mathcal{M}_{j_1}, \ldots, \mathcal{M}_{j_k}$ auszuwählen. Deshalb erhalten wir für die innere Summe

$$\sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_k) \\ r_i \in \mathcal{M}_{j_1} \cap \ldots \cap \mathcal{M}_{j_k}}} 1 = \binom{n(r_i)}{k}$$

und somit

$$E(t) = \sum_{i=1}^{l} \left(1 + \sum_{1 \leq k \leq \min\{n(r_i),t\}} (-1)^k \cdot \binom{n(r_i)}{k} \right).$$

Es sei $n(r_i) \geq 1$. Nach Satz 1.4.1 ist

$$(-1)^t \cdot \left(1 + \sum_{1 \leq k \leq \min\{n(r_i),t\}} (-1)^k \cdot \binom{n(r_i)}{k} \right) = (-1)^{2t} \cdot \binom{n(r_i)-1}{t}.$$

Dies verschwindet aber für $t \geq n(r_i)$ und ist ansonsten nichtnegativ. Dies beendet den Beweis. □

1.5 Das Sieb des Erathosthenes

Satz 1.5.1. *(Sieb des Erathosthenes)*
Mit den Definitionen und Bezeichnungen von Abschnitt 3.2 haben wir

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \sum_{d \mid P(z)} \mu(d) |\mathcal{A}_d|.$$

Beweis.

- Beweis nach dem Einschluss- Ausschluss- Prinzip:
  Es ist
  $$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = |\{m \in \mathcal{A} \colon m \notin \mathcal{A}_p,\ \forall p \in \mathcal{P},\ p < z\}|,$$
  wobei $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ die Primzahlen von $\mathcal{P}$ kleiner z seien.
  Damit ist nach Satz 1.4.2 (Einschluss- Ausschluss- Prinzip)
  $$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = |\mathcal{A}| + \sum_{k=1}^{r} (-1)^k \cdot \sum_{(j_1, \ldots, j_k)} |\mathcal{A}_{p_{j_1}} \cap \ldots \cap \mathcal{A}_{p_{j_k}}|. \tag{1}$$
  Wir setzen $d = p_{j_1} \cdots p_{j_k}$. Dann ist $\mathcal{A}_{p_{j_1}} \cap \ldots \cap \mathcal{A}_{p_{j_k}} = \mathcal{A}_d$ und $(-1)^k = \mu(d)$. Aus (1) erhalten wir
  $$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \sum_{d \mid P(z)} \mu(d) |\mathcal{A}_d|.$$

- Zahlentheoretischer Beweis:
  Es gilt
  $$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \sum_{a \in \mathcal{A} \colon (a, P(z)) = 1} 1 = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{d \mid a \\ d \mid P(z)}} \mu(d) = \sum_{d \mid P(z)} \mu(d) \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ a \equiv 0 \bmod d}} 1 = \sum_{d \mid P(z)} \mu(d) |\mathcal{A}_d|.$$

□

Beispiel 1.5.1. Es sei $\mathcal{A} = \{1, \ldots, 100\}$. Wir wenden Satz 1.5.1 mit $z = 6$ und $\mathcal{P} = \mathbb{P}$ an und erhalten so eine obere Schranke für $\pi(100)$. Es ist

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A}, \mathbb{P}, z) &= \sum_{d \mid P(z)} \mu(d) |\mathcal{A}_d| \\ &= |\mathcal{A}| - |\mathcal{A}_2| - |\mathcal{A}_3| - |\mathcal{A}_5| + |\mathcal{A}_6| + |\mathcal{A}_{10}| + |\mathcal{A}_{15}| - |\mathcal{A}_{30}| \\ &= 100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26. \end{aligned}$$

Damit gilt $\pi(100) \leq S(\mathcal{A}, \mathbb{P}, z) + \pi(6) - 1 = 28$. Mit etwas mehr Rechnung können wir auch den genauen Wert von $\pi(100)$ bestimmen. Hierzu beachten wir, dass jede zusammengesetzte Zahl n einen Teiler kleiner gleich $n^{1/2}$ besitzt.
Es ist damit $\pi(100) = S(\mathcal{A}, \mathbb{P}, z) + \pi(10) - 1$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A}, \mathbb{P}, 10) &= \sum_{d \mid P(z)} \mu(d) |\mathcal{A}_d \\ &= |\mathcal{A}| - |\mathcal{A}_2| - |\mathcal{A}_3| - |\mathcal{A}_5| - |\mathcal{A}_7| + |\mathcal{A}_6| + |\mathcal{A}_{10}| + |\mathcal{A}_{14}| + |\mathcal{A}_{15}| + |\mathcal{A}_{21}| + |\mathcal{A}_{35}| \\ &\quad - |\mathcal{A}_{30}| - |\mathcal{A}_{42}| - |\mathcal{A}_{70}| - |\mathcal{A}_{105}| + |\mathcal{A}_{210}| \\ &= 100 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 = 22. \end{aligned}$$

Damit folgt $\pi(100) = S(\mathcal{A}, \mathbb{P}, 10) + \pi(10) - 1 = 25$

In Anwendungen sind wir an Situationen interessiert, in denen $\mathcal{A}$ von einem Parameter x abhängt. Für $x \to \infty$ wird auch $\mathcal{A} \to \infty$ gelten. Wir benötigen Informationen der Art, wie sie in Abschnitt 1.3 beschrieben wurden. Wir orientieren uns auch den den in Abschnitt 1.3 eingeführten Bezeichnungen. Zudem treffen wir noch folgende Definitionen:

Definition 1.5.1. Die arithmetische Funktion ω sei durch

$$\omega(p) = \begin{cases} \omega_0(p) & \text{für } p \in \mathcal{P} \\ 0 & \text{für } p \notin \mathcal{P} \end{cases}$$

sowie $\omega(1) = 1$ und $\omega(d) = \prod_{p|d} \omega(p)$ für $\mu(d) \neq 0$ definiert. Weiter sei

$$R_d := |\mathcal{A}_d| - \frac{\omega(d)}{d} \cdot X$$

für $\mu(d) \neq 0$ sowie

$$\begin{aligned} W(z) &:= \prod_{p<z} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) \\ V(z) &:= \prod_{p<z} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \end{aligned}$$

Bemerkung 1.5.1. Gehören sämtliche Primfaktoren von d zu $\mathcal{P}$ und ist $\mu(d) \neq 0$, so haben wir $\omega(d) = \omega_0(d)$ und $R_d = r_d$.

Satz 1.5.2. *Für $z \geq 2$ gilt*

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = XW(z) + \theta \cdot \sum_{d|P(z)} |R_d|$$

mit $|\theta| \leq 1$.

Beweis. Nach Satz 1.5.1 haben wir

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \sum_{d|P(z)} \mu(d)|\mathcal{A}_d|.$$

Wir verwenden nun die Approximation

$$|\mathcal{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d} \cdot X + R_d$$

mit dem "Hauptglied" $\frac{\omega(d)}{d} \cdot X$ und dem "Restglied" R_d und trennen die Beiträge der Hauptglieder und der Restglieder.
Wir erhalten

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = X \cdot \sum_{d|P(z)} \mu(d) \cdot \frac{\omega(d)}{d} + \sum_{d|P(z)} \mu(d) \cdot R_d.$$

Es sei $f(d) = \mu(d)\frac{\omega(d)}{d}$. Dies ist eine multiplikative Funktion. Damit ist auch die Faltung $f \star 1$ mit

$$(f \star 1)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{\omega(d)}{d}$$

multiplikativ.

Also gilt

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d) \cdot \frac{\omega(d)}{d} = \prod_{p|P(z)} \sum_{d|p} \mu(d) \cdot \frac{\omega(d)}{d} = \prod_{p<z} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) = W(z).$$

Wegen $|\mu(d)| = 1$ ist

$$\left| \sum_{d|P(z)} \mu(d) R_d \right| \leq \sum_{d|P(z)} |R_d|,$$

also

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = XW(z) + \theta \cdot \sum_{d|P(z)} |R_d|.$$

□

Satz 1.5.3. *Es gibt eine Konstante $C_0 > 0$, so dass*

$$V(z) = \frac{C_0}{\log z} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right)$$

für $z \to \infty$ gilt.

Beweis. Wir haben

$$V(z) = \prod_{p<z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{p<z} \left(-\frac{1}{p} + \left(\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right)\right). \tag{1}$$

Aus der Taylorreihe

$$\log(1-x) = -x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cdot x^k$$

für $|x| < 1$ folgt

$$\left|\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right| \leq \frac{1}{p^2}. \tag{2}$$

Damit ist nach dem Majorantenkriterium die unendliche Reihe

$$\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}$$

konvergent, und wir haben nach (2)

$$\sum_{p<z} \left(-\frac{1}{p} + \left(\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right)\right) = c_1 + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Aus (1) erhalten wir

$$\log V(z) = -\sum_{p<z} \frac{1}{p} + c_1 + O\left(\frac{1}{z}\right)$$

und nach Satz 1.2.4

$$\log V(z) - \log\log z - b + c_1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right).$$

Die Behauptung folgt durch Exponentation, wenn wir $C_0 = e^{c_1 - b}$ setzen. □

Bemerkung 1.5.2. Es kann gezeigt werden, dass $C_0 = e^{-\gamma}$ mit der Euler- Mascheronischen- Konstante

$$\gamma = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \log N \right)$$

gilt.

Beispiel 1.5.2. Es sei $\mathcal{A} = \{n : x - y < n \le x\}$, wobei $1 < y \le x$. Für $z \ge 2$ wollen wir eine Aussage über $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$ erhalten. Nach Beispiel 3.5.1 empfiehlt sich die Wahl $X = y$ und $\omega_0(p) = 1$ für alle p.
Wir erhalten für $r_d = |\mathcal{A}_d| - \frac{\omega_0(d)}{d} X$ dann $|r_d| \le 1$. Nach Definition 1.5.1 ist wegen $\mathcal{P} = \mathbb{P}$ dann $\omega_0(p) = \omega(p)$ und $R_d = r_d$. Es ist

$$W(z) = V(z) = \prod_{p<z} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Damit erhalten wir nach den Sätzen 1.5.2 und 1.5.3 mit $\theta|, |\theta'| \le 1$

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = XW(z) + \theta \cdot \sum_{d|P(z)} |R_d| = \frac{C_0 y}{\log z} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right) + \theta' \cdot 2^{\pi(z)}.$$

Wir erhalten nur dann ein nichttriviales Ergebnis, wenn $2^{\pi(z)} \le y$ gilt. Ist $y = x$, so ist dies für $z_0 = c \log x \log\log x$ erfüllt, und wir erhalten

$$\pi(x) \le S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = O\left(\frac{x}{\log\log x}\right),$$

ein Ergebnis, das wesentlich schwächer als Tschebyschews Ergebnis $\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$ ist. Andererseits erhalten wir für $y \ge x^\epsilon$ mit einem festen $\epsilon > 0$ für die Anzahl der Primzahlen im Intervall $(x - y, x)$ die Größe $\pi(x) - \pi(x - y) = O\left(\frac{y}{\log\log x}\right)$.

1.6 Das Reine Brunsche Sieb

Definition 1.6.1. Für $d \in \mathbb{N}$ bedeute $\nu(d)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von d, also

$$\nu(d) := \sum_{p|d} 1.$$

Satz 1.6.1. *(Reines Brunsches Sieb, allgemeine Version)*
Es sei $s \in \mathbb{N}_0$. Mit den Bezeichnungen von Abschnitt 1.3 haben wir

$$\sum_{\substack{d|P(z) \\ \nu(d) \le 2s+1}} \mu(d)|\mathcal{A}_d| \le S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) \le \sum_{\substack{d|P(z) \\ \nu(d) \le 2s}} \mu(d)|\mathcal{A}_d|.$$

Beweis. Es ist

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = |\{m \in \mathcal{A} : m \notin \mathcal{A}_p \forall p \in \mathcal{P},\ p < z\}|.$$

Es seien $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ die Primzahlen von $\mathcal{P}$ kleiner z.

Dann ist nach Satz 1.4.3 (Einschluss- Ausschluss- Ungleichungen)

$$|\mathcal{A}|+\sum_{k=1}^{2s+1}(-1)^k\cdot\sum_{(p_{j_1},\ldots,p_{j_k})}|\mathcal{A}_{p_{j_1}}\cap\ldots\cap\mathcal{A}_{p_{j_k}}|\leq S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)\leq|\mathcal{A}|+\sum_{k=1}^{2s}(-1)^k\cdot\sum_{(p_{j_1},\ldots,p_{j_k})}|\mathcal{A}_{p_{j_1}}\cap\ldots\cap\mathcal{A}_{p_{j_k}}|. \tag{1}$$

Wir setzen $d = p_{j_1}\cdots p_{j_k}$, woraus $\mathcal{A}_{p_{j_1}}\cap\ldots\cap\mathcal{A}_{p_{j_k}} = \mathcal{A}_d$ und $(-1)^k = \mu(d)$ folgt. Dann folgt die Behauptung direkt aus (1). □

Um eine schärfere Aussage zu erhalten, nehmen wir noch an, dass für die Menge $\mathcal{A}_d$ Approximationen der in Abschnitt 1.3 beschriebenen Art gegeben sind. Für die multiplikative Funktion ω setzen wir zusätzlich voraus, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\omega(p)\leq A_0 \tag{Ω_0}$$

und

$$0\leq\frac{\omega(p)}{p}\leq 1-\frac{1}{A_1} \tag{Ω_1}$$

mit positiven Konstanten A_0 und A_1.

Zur Vorbereitung des Beweises des Hauptresultats treffen wir zunächst eine Definition und beweisen ein Lemma:

Definition 1.6.2. Es sei $r\in\mathbb{N}$ und $d|P(z)$. Wir setzen

$$\chi^{(r)}(d)=\begin{cases}1, & \text{falls } \nu(d)\leq r\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

und $\sigma^{(r)}(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\chi^{(r)}(d)$ sowie

$$g(d)=\frac{\omega(d)}{d\cdot\prod_{p|d}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)}.$$

Weiter sei B_0 eine Konstante mit

$$\sum_{p<z}\frac{1}{p}\leq\log\log z+B_0$$

für alle $z\geq 2$. Nach Satz 1.2.4 gibt es eine solche Konstante.

Lemma 1.6.1. *Es sei $d|P(z)$ und $\nu(n)=v$. Dann haben wir*

$$\sum_{d|n}\mu(d)\chi^{(r)}(d)=(-1)^r\binom{v-1}{r}.$$

Insbesondere haben wir für $\nu(n)<r$ dann $\sigma^{(r)}(n)=0$.

Beweis. Die Anzahl der Teiler von n mit $\nu(d)=m$ ist $\binom{v}{m}$. Für solche Teiler ist dann $\mu(d)=(-1)^m$. Damit gilt

$$\sum_{d|n}\mu(d)\chi^{(r)}(d)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{v}{m}=(-1)^r\binom{v}{r}$$

nach Satz 1.4.1. □

Satz 1.6.2. (Ω_0), (Ω_1)
Es sei $z \geq 2$ *und* λ *so gewählt, dass* $0 < \lambda e^{1+\lambda} \leq 1$ *und* $r_0 = \left[\frac{A_0 A_1}{\lambda} \cdot (\log\log z + B_0)\right] + 1$*. Dann gibt es Konstanten* θ *und* θ' *mit* $|\theta| \leq 1$ *und* $|\theta'| \leq 1$*, so dass*

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = XW(z) \cdot \left(1 + \theta \left(\lambda e^{1+\lambda}\right)^{(A_0 A_1/\lambda)\cdot(\log\log z + B_0)}\right) + \theta' \cdot \sum_{\substack{d|P(z) \\ \nu(d) \leq r_0+1}} |R_d|$$

gilt.

Beweis. Es sei $s \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{2s, 2s+1\}$.
Wir spalten die untere Schranke $r = 2s+1$ und die obere Schranke $r = 2s$ von Satz 1.6.1 in Hauptglied und Restglied auf, indem wir die Approximation

$$|\mathcal{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d} X + R_d$$

benützen. Wir erhalten

$$\sum_{\substack{d|P(z) \\ \nu(d) \leq r}} \mu(d) |\mathcal{A}_d| = X \cdot \sum\nolimits_H^{(r)} + \sum\nolimits_R^{(r)} \tag{1}$$

mit

$$\sum\nolimits_H^{(r)} = \sum_{d|P(z)} \mu(d) \chi^{(r)}(d) \frac{\omega(d)}{d} \tag{2}$$

bzw.

$$\sum\nolimits_R^{(r)} = \sum_{d|P(z)} \mu(d) \chi^{(r)}(d) R_d. \tag{3}$$

Wir formen zunächst $\sum\nolimits_H^{(r)}$ um.
Es wird dabei angestrebt, einen Vergleich zwischen dem Term $X \cdot \sum\nolimits_H^{(r)}$ in (1) und dem Term $XW(z)$ zu erhalten, der sich beim Sieb des Erathosthenes als Hauptglied ergibt.
Zunächst ergibt die Möbiussche Umkehrformel

$$\chi^{(r)}(d) = \sum_{\delta | d} \mu(d/\delta) \sigma^{(r)}(\delta).$$

Einsetzen von (2) ergibt

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_H &= \sum_{d|P(z)} \mu(d) \chi^{(r)}(d) \frac{\omega(d)}{d} = \sum_{d|P(z)} \frac{\omega(d)}{d} \sum_{\delta|d} \mu\left(\frac{d}{\delta}\right) \sigma^{(r)}(\delta) \\
&\underset{d=\delta\cdot t}{=} \sum_{\delta|P(z)} \sigma^{(r)}(\delta) \frac{\omega(\delta)}{\delta} \sum_{t|P(z)/\delta} \mu(t) \frac{\omega(t)}{t} = \sum_{\delta|P(z)} \sigma_r(\delta) \frac{\omega(\delta)}{\delta} \prod_{p|P(z)/\delta} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) \\
&= W(z) \cdot \sum_{\delta|P(z)} \frac{\omega(\delta)}{\delta \cdot \prod_{p|\delta}\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)} \cdot \sigma_r(\delta) = W(z) \cdot \left(1 + \sum_{1<\delta|P(z)} \sigma^{(r)}(\delta) g(\delta)\right),
\end{aligned}$$

also

$$\sum\nolimits_H = W(z) \cdot \left(1 + \sum_{1<\delta|P(z)} \sigma^{(r)}(\delta) g(\delta)\right). \tag{4}$$

Als nächstes wollen wir nun eine Schranke für den "Fehler im Hauptglied" erhalte. Mit Lemma 1.6.1 folgt

$$\begin{aligned}\left|\sum_{1<d|P(z)} \sigma^{(r)}(d)g(d)\right| &\leq \sum_{1<d|P(z)} \binom{\nu(d)}{r} g(d) = \sum_{m=r}^{\nu(P(z))} \binom{m}{r} \sum_{\substack{1<d|P(z)) \\ \nu(d)=m}} g(d) \\ &\leq \sum_{m=r}^{\infty} \binom{m}{r} \cdot \frac{1}{m!} \cdot \left(\sum_{p<z} g(p)\right)^m = \frac{1}{r!} \cdot \left(\sum_{p<z} g(p)\right)^r \cdot \exp\left(\sum_{p<z} g(p)\right),\end{aligned}$$

folglich

$$\left|\sum_{1<d|P(z)} \sigma^{(r)}(d)g(d)\right| \leq \frac{1}{r!} \cdot \left(\sum_{p<z} g(p)\right)^r \cdot \exp\left(\sum_{p<z} g(p)\right). \tag{5}$$

Es sei nun λ mit $0a < \lambda \cdot e^{1+\lambda} < 1$ gegeben. Damit ist nach der Definition von r_0

$$\sum_{p<z} g(p) \leq \lambda \cdot r_0. \tag{6}$$

Indem wir die Schranke $\frac{1}{r!} \leq \left(\frac{e}{r}\right)^r$ für $r \in \mathbb{N}$ benützen, die durch Umformen aus $\left(1+\frac{1}{r}\right)^r < e$ entsteht, erhalten wir mit $r = r_0$

$$\frac{1}{r_0!} \cdot \left(\sum_{p<z} g(p)\right)^{r_0} \cdot \exp\left(\sum_{p<z} g(p)\right) \leq \left(\frac{e}{r_0}\right)^{r_0} \cdot (\lambda \cdot r_0)^{r_0} \cdot e^{\lambda r_0} = \left(\lambda \cdot e^{1+\lambda}\right)^{r_0}. \tag{7}$$

Es gilt auch

$$\sum_{p<z} g(p) \leq \lambda \cdot (r_0 + 1).$$

Durchführung der obigen Rechnungen für $r = r_0 + 1$ ergibt

$$\frac{1}{(r_0+1)!} \cdot \left(\sum_{p<z} g(p)\right)^{r_0+1} \cdot \exp\left(\sum_{p<z} g(p)\right) \leq \left(\lambda \cdot e^{1+\lambda}\right)^{r_0+1}. \tag{8}$$

Wir wenden nun Satz 1.6.1 an und erhalten mit (1)

$$X \cdot \sum\nolimits_H^{(r_1)} + \sum\nolimits_R^{(r_1)} \leq S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) \leq X \cdot \sum\nolimits_H^{(r_2)} + \sum\nolimits_R^{(r_2)}$$

mit $\{r_1, r_2\} = \{r_0, r_0 + 1\}$ und mit (7) und mit (8)

$$XW(z) \cdot \left(1 - \left(\lambda \cdot e^{1+\lambda}\right)^{r_0}\right) - \sum_{\substack{d|P(z) \\ \nu(d) \leq \nu_0+1}} |R_d| \leq S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) \leq XW(z) \cdot \left(1 + \left(\lambda \cdot e^{1+\lambda}\right)^{r_0}\right) + \sum_{\substack{d|P(z) \\ \nu(d) \leq \nu_0+1}} |R_d|.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel 1.6.1. Es sei $\mathcal{A} = \{n \colon n \leq x\}$ und $\mathcal{P} = \mathbb{P}$.
Nach Beispiel 3.5.2 sind geeignete Approximationen durch $X = x$ und $\omega(d) = 1$ gegeben.
Die Bedingungen (Ω_0): $\omega(p) \leq A_0$ und (Ω_1): $0 \leq \frac{\omega(p)}{p} \leq 1 - \frac{1}{A_1}$ sind mit $A_0 = 1$ und $A_1 = 2$ erfüllt.
Wir wählen $\lambda = \frac{1}{5}$ und $z = \exp\left(\frac{1}{20} \frac{\log x}{\log\log x}\right)$ und erhalten $r_0 = [10(\log\log z + B_0)] + 1$. Es sei $d|P(z)$ und $\nu(d) \leq r_0 + 1$. Dann gilt

$$d \leq z^{r_0+1} \leq \exp\left(\frac{1}{20} \frac{\log x}{\log\log x} \cdot (10 \log\log x + B_0) + 2\right) = O(x^{3/5})$$

und damit

$$\sum_{\substack{d|P(z)\\ \nu(d)\leq r_0+1}} |R_d| = O(x^{3/5}).$$

Weiter ist

$$W(z) = \frac{C_0}{\log z} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right) = O\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right).$$

Damit folgt aus Satz 1.6.1

$$\pi(x) = O\left(x \cdot \frac{\log\log x}{\log x}\right).$$

Dies ist wesentlich schärfer als das aus dem Sieb des Erathosthenes erhaltene Ergebnis

$$\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log\log x}\right).$$

mit $z = c\frac{\log x}{\log\log x}$, aber immer noch schwächer als das Tschebyschewsche Resultat

$$\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Beispiel 1.6.2. Es sei $\mathcal{A} = \{n \cdot (n+2) \colon n \leq x\}$ und $\mathcal{P} = \mathbb{P}$. Nach Beispiel 1.3.3 ist eine geeignete Wahl für die Parameter X und die multiplikative Funktion ω durch $X = x$ und

$$\omega(p) = \begin{cases} 1 & \text{für } p = 2 \\ 2 & \text{für } p > 2 \end{cases}$$

gegeben. Es gilt dann $|R_d| < d$.
Die Bedingungen (Ω_0): $\omega(p) \leq A_0$ und (Ω_1): $0 \leq \frac{\omega(p)}{p} \leq 1 - \frac{1}{A_1}$ sind mit $A_0 = 2$ und $A_1 = 3$ erfüllt. Wir wählen $\lambda = \frac{1}{5}$ und $z = \exp\left(\frac{1}{120}\frac{\log x}{\log\log x}\right)$ und erhalten $r_0 = [30(\log\log z + B_0)] + 1$. Es sei $d|P(z)$ und $\nu(d) \leq r_0 + 1$. Dann gilt

$$d \leq z^{r_0+1} \leq \exp\left(\frac{1}{120}\frac{\log x}{\log\log x} \cdot (30\log\log x + B_0) + 2\right) = O(x^{1/3})$$

und damit

$$\sum_{\substack{d|P(z)\\ \nu(d)\leq r_0+1}} |R_d| = O(x^{2/3}).$$

Es ist

$$W(z) = \prod_{p<z}\left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right) = \prod_{2<p<z}\left(1 - \frac{2}{p}\right) = O\left(\exp\left(\sum_{2<p<z}\log\left(1 - \frac{2}{p}\right)\right)\right) = O\left(\frac{1}{\log^2 z}\right)$$

für $z \to \infty$.

Damit ergibt sich für $\pi_2(x)$, die Anzahl der Primzahlzwillinge kleiner gleich x

$$\pi_2(x) = O\left(x \cdot \frac{(\log\log x)^2}{\log^2 x}\right).$$

Dieses war historisch der erste Erfolg der Brunschen Methode.

Als Folgerung haben wir

Satz 1.6.3. *Es gilt*

$$\sum_{p\colon\, p+2\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} < \infty.$$

Beweis. Partielle Summation ergibt

$$\sum_{\substack{p\colon\, p+2\in\mathbb{P}\\ p+2\leq x}} \frac{1}{p} \leq \frac{\pi_2(x)}{x} + \int_2^x \frac{\pi_2(t)}{t}\,dt.$$

Nun ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi_2(x)}{x} = 0$$

und

$$\int_2^x \frac{\pi_2(t)}{t}\,dt = O\left(\int_2^x \frac{(\log\log t)^2}{t\cdot\log^2 t}\,dt\right) < \infty.$$

□

1.7 Kombinatorische Siebe

Das Sieb des Erathosthenes und das Reine Brunsche Sieb sind Beispiele Kombinatorischer Siebe. Als Vorbereitung zur Behandlung des Brunschen Siebes, das auch in diese Kategorie fällt, wollen wir hier ein paar allgemeine Prinzipien der Kombinatorischen Siebe behandeln.
Allen Kombinatorischen Sieben gemeinsam ist die Anwendung von Ungleichungen

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_2(d)|\mathcal{A}_d| \leq S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) \leq \sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_1(d)|\mathcal{A}_d| \tag{1}$$

mit $\chi_\nu \in \{0,1\}$.
Die Ungleichungen (1) beruhen auf Ungleichungen für die Funktionen σ_ν, die durch

$$\sigma_\nu(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\chi_\nu(d) \tag{2}$$

mit $\sigma_\nu(1) = \chi_\nu(1) = 1$ für $\nu = 1,2$ definiert sind.
Im einfachsten Fall, dem Sieb des Erathosthenes, wird $\chi_1(d) = \chi_2(d) = 1$ für alle $d|P(z)$ gewählt, und wir erhalten

$$\sigma_1(d) = \sigma_2(d) = \sigma_0(d) := \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Im allgemeinen Kombinatorischen Sieb sind die Ungleichungen für σ_1 und σ_2 durch

$$\sigma_2(d) \leq \sigma_0(d) \leq \sigma_1(d) \tag{3}$$

für alle $d|P(z)$, d.h. $\sigma_2(d) \leq 0 \leq \sigma_1(d)$ für $d > 1$ und $\sigma_2(1) = \sigma_1(1) = 1$ gegeben.

Aus den Ungleichungen (3) folgen dann die Ungleichungen (1) durch Änderung der Summationsreihenfolge:

$$\begin{aligned}
\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_\nu(d)|\mathcal{A}_d| &= \sum_{a\in\mathcal{A}}\sum_{d|a}\mu(d)\chi_\nu(d) \\
&= \sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ d|P(z)}} \sigma_\nu((a,P(z))) \begin{cases} \geq S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) & \text{für } \nu=1 \\ \leq S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) & \text{für } \nu=2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Wir wollen nun Bedingungen formulieren, aus denen die Ungleichungen (1) und (3) folgen:

Definition 1.7.1. Für $d|P(z)$ sei $q(d)$ der kleinste Primfaktor von $d|P(z)$. Wir setzen $q(1)=\infty$. Für $2\leq z_1\leq z$ sei

$$P_{z_1,z} = \prod_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ z_1\leq p<z}} p = \frac{P(z)}{P(z_1)}.$$

Es sei $\mathcal{P}^{(d)} = \{p\in\mathcal{P}\colon p \nmid d\}$.

Die Funktionen $\chi_\nu(d)$ für $\nu=1,2$, welche für alle $d|P(z)$ definiert sind, mögen die folgenden Bedingungen (KS) erfüllen:

Definition 1.7.2. (KS):

- (I): $\chi_\nu(d)=0$ oder $\chi_\nu(d)=1$, falls $d|P(z)$
- (II): $\chi_\nu(1)=1$
- (III): Aus $\chi_\nu(d)=1$ folgt, dass $\chi_\nu(t)=1$ für alle $t|d$ mit $d|P(z)$ (Teilergeschlossenheit).
- (IV): Aus $\chi_\nu(t)=1$, $\mu(t)=(-1)^\nu$ folgt, dass $\chi_\nu(pt)=1$ für alle $pt|P(z)$ für $p<q(t)$.

Verfahren, in denen die Siebfunktionen $S(\mathcal{A},\mathcal{P},z)$ durch die Ausdrücke

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_\nu(d)|\mathcal{A}_d|$$

abgeschätzt werden, heißen Kombinatorische Siebe.

Satz 1.7.1. *Die Funktionen $\chi_\nu(d)$ für $\nu=1,2$ mögen die Bedingungen (KS) aus Definition 1.7.2 erfüllen. Dann gilt*

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_2(d)|\mathcal{A}_d| \leq S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) \leq \sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_1(d)|\mathcal{A}_d|.$$

Beweis. Mittels der Möbiusschen Umkehrformel erhalten wir

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_\nu(d)|\mathcal{A}_d| = \sum_{d|P(z)} |\mathcal{A}_d| \sum -\delta|d\mu\left(\frac{d}{\delta}\right)\sigma_\nu(\delta) = \sum_{\delta|P(z)} \sigma_\nu(\delta) \sum_{t|P(z)/\delta} \mu(t)|\mathcal{A}_{\delta t}|.$$

Mit

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) = \sum_{d|P(z)} \mu(d)|\mathcal{A}_d|$$

erhalten wir daraus

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) = \sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_\nu(d)|\mathcal{A}_d| - \sum_{1<d|P(z)} \sigma_\nu(d)S(\mathcal{A}_d,\mathcal{P}^{(d)},z). \tag{1}$$

Zur Umformung der zweiten Summe in (1) benützen wir folgende Rekursion. Für $2 \leq z_1 \leq z$ sei

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z_1) = \sum_{t|P_{z,z}} \sum_{\substack{a\in\mathcal{A} \\ (a,P(z_1))=1 \\ (a,P_{z_1,z})=t}} 1 = \sum_{t|P_{z_1,z}} \sum_{\substack{a\in\mathcal{A}_t \\ (a,P(z)/t)=1}} 1 = \sum_{t|P_{z_1,z}} S(\mathcal{A}_t, \mathcal{P}^{(t)}, z). \tag{2}$$

Weiter haben wir

$$\sigma_\nu(\delta) = \sum_{l|\delta/q(\delta)} \mu(l)\chi_\nu(l) + \sum_{l|\delta/q(\delta)} \mu(q(\delta)l)\chi - \nu(q(\delta)l) = \sum_{l|\delta/q(\delta)} \mu(l) \cdot (\chi_\nu(l) - \chi_\nu(q(\delta)l)). \tag{3}$$

Zur Behandlung der zweiten Summe in (1) setzen wir $d = q(d) \cdot \delta$ und $q(\delta) = p$. Aus der Definition von $q(\delta)$ ergibt sich dann die Bedingung $p < q(\delta)$. Mit (3) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{1<d|P(z)} \sigma_\nu(d)S(\mathcal{A}_d, \mathcal{P}^{(d)}, z) &= \sum_{\delta|P(z)} \sum_{\substack{p|P(z) \\ p<q(\delta)}} A(\mathcal{A}_{p\delta}, \mathcal{P}^{(p\delta)}, z) \sum_{l|\delta} \mu(l) \cdot (\chi(l) - \chi(pl)) \\
&\underset{\delta=lt}{=} \sum_{l|P(z)} \sum_{\substack{p|P(z) \\ p<q(l)}} \mu(l) \cdot (\chi(l) - \chi(pl)) \cdot \sum_{\substack{t|P(z)/l \\ p<q(t)}} S(\mathcal{A}_{plt}, \mathcal{P}^{(plt)}, z) \\
&= \sum_{l|P(z)} \sum_{\substack{p|P(z) \\ p<q(l)}} \mu(l) \cdot (\chi(l) - \chi(pl)) \cdot S(\mathcal{A}_{pl}, \mathcal{P}^{(pl)}, p),
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Rekursion (2) benutzt wurde.
Damit ergibt sich aus (1)

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) = \sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_\nu(d)|\mathcal{A}_d| - \sum_{d|P(z)} \sum_{\substack{p|P(z) \\ p<q(d)}} \mu(d) \cdot (\chi_\nu(d) - \chi_\nu(pd)) \cdot S(\mathcal{A}_{pd}, \mathcal{P}, p).$$

Dabei kann die Menge $\mathcal{P}^{(pd)}$, die sich aus dem vorigen Schritt ergibt, kann hier durch $\mathcal{P}$ ersetzt werden, da die Elemente dieser Mengen, die kleiner als p sind, dieselben sind.
Wir können nun den Beweis beenden, indem wir zeigen, dass

$$(-1)^\nu \mu(d) \cdot (\chi_\nu(d) - \chi - \nu(pd)) \leq 0 \tag{4}$$

für $\nu = 1, 2$ und für alle Paare (p, d) mit $p, d|P(z)$ und $p < q(d)$ gilt.
Dafür betrachten wir folgende Fälle:

- Fall 1: $\mu(d) = -(-1)^\nu$:
  Wegen der Eigenschaft (III) von χ_ν, der Teilerabgeschlossenheit, folgt $\chi_\nu(d) - \chi_\nu(pd) \geq 0$, da aus $\chi_\nu(pd) = 1$ auch $\chi - \nu(d) = 1$ folgt. Damit gilt (4).

- Fall 2: $\mu(d) = (-1)^\nu$:
  Wegen der Eigenschaft (IV) folgt aus $\chi_\nu(d) = 1$ auch $\chi_\nu(pd) = 1$ für $p < q(d)$. Damit gilt (4).

Damit ist der Beweis komplett. □

Satz 1.7.2. *Die Funktionen $\chi_\nu(d)$ für $\nu = 1, 2$ mögen die Bedingungen (KS) aus Definition 1.7.2 erfüllen. Dann gilt*

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_\nu(d)\frac{\omega(d)}{d} = W(z) \cdot \left(1 + (-1)^{\nu-1} \cdot \sum_{p<z} \frac{\omega(p)}{p}\frac{W(p)}{W(z)} \sum_{t|\mathcal{P}_{p^+,z}} \frac{\chi_\nu(t) \cdot (1 - \chi_\nu(pt)}{t}\omega(t)\right),$$

wobei hier p^+ die Primzahl $p^+ \in \mathcal{P}$ bedeute, die auf $p \in \mathcal{P}$ folgt.

Beweis. Wir zeigen zunächst:

$$\chi_\nu(t) = -\chi_\nu(pt) = (-1)^{\nu-1}\mu(t)\chi_\nu(t)\cdot(1-\chi_\nu(pt)), \tag{1}$$

falls $pt|P(z)$ und $p < q(t)$ für $\nu = 1, 2$ ist.
Fall 1: $\chi_\nu(pt) = 1$
Dann gilt wegen der Teilerabgeschlossenheit (III) auch $\chi - \nu(t) = 1$, womit (1) gilt.
Fall 2: $\chi_\nu(pt) = 0$
Dann ist (1) erfüllt, falls $\chi_\nu(t) = 0$ gilt.
Es sei nun $\chi_\nu(t) = 1$. Dies ist nach (KS) nur möglich, falls $\mu(t) = (-1)^{\nu-1}$ ist. Auch hier ist (1) erfüllt.

Wir zeigen nun als nächstes:

$$\sum_{p|d}\left(\chi_\nu((d, P_{p^+,z})) - \chi_\nu((d, P_{p,z}))\right) = 1 - \chi_\nu(d). \tag{2}$$

Es sei $d = p_1 \cdots p_r$ mit $p_1 < \ldots < p_r$. Weiter ist $(d, P_{p^+,z}) = (d, P_{p,z})$ außer für $p \in \{p_1, \ldots, p_r\}$. In diesem Fall ist $(d, P_{p_i,z}) = p_1 p_{i+1} \cdots p_r$ und $(d, P_{p_i^+,z}) = p_{i+1} \cdots p_r$. Damit haben wir

$$\begin{aligned}\sum_{p|d}\left(\chi_\nu((d, P_{p^+,z})) - \chi_\nu((d, P_{p,z}))\right) &= \chi_\nu(p_2\cdots p_r) - \chi_\nu(p_1\cdots p_r) + \chi_\nu(p_3\cdots p_r) - \chi_\nu(p_2\cdots p_r) \\ &\quad + \ldots + \chi_\nu(p_r) - \chi_\nu(p_{\nu-1}\cdot p_r) + 1 - \chi_\nu(p_r) = 1 - \chi_\nu(d),\end{aligned}$$

womit (2) gezeigt ist.
Wir setzen nun (2) in die linke Seite der Behauptung ein und erhalten

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_\nu(d)\frac{\omega(d)}{d} = \underbrace{W(z)}_{d=1} + \sum_{d|P(z)}\sum_{p|d}\mu\left(\frac{d}{p}\right)\left(\chi_\nu((d, P_{p^+,z})) - \chi_\nu((d, P_{p,z}))\right)\frac{\omega(d)}{d}.$$

Setze $d = \delta p t$ mit $\delta|P(p)$ und $t|P_{p^+,z}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_\nu(d)\frac{\omega(d)}{d} &= W(z) + \sum_{p<z}\frac{\omega(p)}{p}\sum_{\delta|P(p)}\mu(\delta)\frac{\omega(\delta)}{\delta}\sum_{t|P_{p^+,z}}\mu(t)\frac{\chi_\nu(t) - \chi_\nu(pt)}{t}\omega(t) \\ &= W(z) + (-1)^{\nu-1}\sum_{p<z}\frac{\omega(p)}{p}W(p)\sum_{t|P_{p^+,z}}\frac{\chi_\nu(t)(1-\chi_\nu(pt))}{t}\omega(t),\end{aligned}$$

wobei (1) im letzten Schritt benutzt wurde. □

1.8 Das Brunsche Sieb

Nachdem Viggo Brun das Reine Brunsche Sieb entwickelt hat, baute er in den folgenden Jahren die Methode weiter aus und erhielt das noch leistungsfähigere Brunsche Sieb. Wie das Sieb des Erathosthenes und das Reine Brunsche Sieb ist auch das Brunsche Sieb ein Kombinatorisches Sieb und erfüllt die Definition 1.7.2.
Wir beschreiben als erstes die Wahl der charakteristischen Funktionen χ_ν für $\nu = 1, 2$. Hier werden nicht nur Forderungen über die Anzahl $\nu(d)$ der Primfaktoren von $d|P(z)$ erhoben ($\nu(d) \le 2s + 1$ bzw. $\nu(d) \le 2s$) wie beim Reinen Brunschen Sieb, sondern auch Forderungen über die Anzahl der Primfaktoren von d in gewissen Intervallen.

Definition 1.8.1. Es sei $z \geq 2$, und (z_n) sei eine Folge mit $2 = z_r < z_{r-1} < \ldots < z_1 < z_0 = z$ für $0 \leq n < r$. Diese Folge wird später speziell gewählt werden. Es sei $b \in \mathbb{N}$. Dann setzen wir für $\nu = 1, 2$

$$\chi_\nu(d) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \nu((d, P_{z_n,z})) \leq 2b - \nu + 2n - 1,\ 1 \leq n \leq r \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{$*$}$$

Wir zeigen zunächst, dass mit dieser Wahl ein Kombinatorisches Sieb vorliegt.

Lemma 1.8.1. *Die Funktionen χ_ν erfülllen die Bedingungen (KS) von Definition 1.7.2.*

Beweis. Die Gültigkeit von (I) bis (III) ist unmittelbar klar.
Wir wollen die Gültigkeit von (IV) beweisen.
Es sei $\nu(t) = (-1)^\nu$, $p < q(t)$ und $z_m \leq p < z_{m-1}$. Um $\chi_\nu(pt) = 1$ zu zeigen, genügt es, die Gültigkeit von $(*)$ für $n = m$ nachzuweisen, also die Ungleichung $\nu(pt) \leq 2b - \nu + 2m - 1$. Wegen $\chi_\nu(t) = 1$ ist $\nu(t) \leq 2b - \nu + 2m - 1$. Wegen $\mu(t) = (-1)^{\nu(t)} = (-1)^\nu$ ist $\nu(t) = 2b - \nu + 2m - 1$ nicht möglich. Damit gilt $\nu(t) < 2b - \nu + 2m - 1$ und $\nu(pt) \leq 2b - \nu + 2m - 1$, womit auch (IV) gezeigt ist. □

Zur Formulierung eines allgemeinen Ergebnisses führen wir noch eine weitere Bedingung über die multiplikative Funktion ω und die Reste R_d ein.

Definition 1.8.2. Es sei $\kappa > 0$, $A_0' \geq 1$, $A_2 \geq 1$, $L \geq 1$ und $0 < \alpha \leq 1$. Dann ist die Bedingung $(\Omega_2(\kappa))$ durch

$$\sum_{w \leq p < z} \frac{\omega(p) \log p}{p} \leq \kappa \log \frac{z}{w} + A_2 \tag{$\Omega_2(\kappa)$}$$

für $2 \leq w \leq z$ gegeben.
Die Bedingungen (R_0) und $(R_1(\kappa, \alpha))$ sind durch

$$|R_d| \leq L \cdot \left(\frac{X \log X}{d} + 1 \right) \cdot A_0'^{\nu(d)} \tag{R_0}$$

für $\nu(d) \neq 0$ und $p|d \Rightarrow p \in \mathcal{P}$ sowie, dass für jedes $u \geq 1$ ein $C_0 > 0$ mit

$$\sum_{\substack{d < X^\alpha \log^{-C_0} X \\ p|d \Rightarrow p \in \mathcal{P}}} \mu^2(d) |R_d| = O_u\left(\frac{X}{\log^{\kappa+u} X} \right) \tag{$R_1(\kappa,\alpha)$}$$

existiert, gegeben.

Bemerkung 1.8.1. Aus dem Ergebnis von Satz 1.2.3

$$\sum_{p<z} \frac{\log p}{p} = \log z + O(1)$$

sieht man, dass die Bedingung $(\Omega_2(\kappa))$ folgendes besagt:
In jedem nicht zu kurzen Intervall $[w, z]$ ist der durchschnittliche Wert dieser Funktion $\omega(p)$ kleiner gleich κ.

In manchen Aussagen der Siebtheorie treten auch zweiseitige Bedingungen der Form

$$-L \leq \sum_{w \leq p < z} \frac{\omega(p) \log p}{p} - \kappa \log \frac{z}{w} \leq A_2 \tag{$\Omega_2(\kappa, L)$}$$

auf. Dann ist κ der durchschnittliche Wert von $\omega(p)$. Man nennt dieses κ die Dimension des Siebs. Für $\kappa = 1$ spricht man von einem linearen Sieb.

Zur Vorbereitung des Hauptresultats benötigen wir

Lemma 1.8.2. (Ω_1), $(\Omega_2(\kappa))$
Für $2 \leq w \leq z$ haben wir

$$\frac{W(w)}{W(z)} \leq \exp\left(\kappa \log \frac{\log z}{\log w} + \frac{A_2}{\log w} \cdot \left(1 + A_1\kappa + \frac{A_1 A_2}{\log 2}\right)\right).$$

Beweis. Nach $(\Omega_2(\kappa, L))$ gilt

$$\sum_{w \leq p < z} \frac{\omega(p) \log p}{p} \leq \kappa \log \frac{z}{w} + A_2,$$

woraus mit partieller Summation

$$\begin{aligned}
\sum_{w \leq p < z} \frac{\omega(p)}{p} &\leq \frac{\kappa \log \frac{z}{w} + A_2}{\log z} + \int_w^z \frac{\kappa \frac{t}{w} + A_2}{t \log^2 t}\, dt \\
&= \frac{\kappa(\log z - \log w) + A_2}{\log z} + \int_w^z \frac{\kappa(\log t - \log w) + A_2}{t \log^2 t}\, dt \\
&= \kappa - \kappa \frac{\log w}{\log z} + \frac{A_2}{\log z} + \kappa \cdot \int_w^z \frac{dt}{t \log t} + (-\kappa \log w + A_2) \cdot \int_w^z \frac{dt}{t \log^2 t} \\
&= \kappa - \kappa \frac{\log z}{\log w} + \frac{A_2}{\log z} + \kappa \log \frac{\log z}{\log w} + (-\kappa \log w + A_2) \cdot \left(-\frac{1}{\log z} + \frac{1}{\log w}\right) \\
&= \kappa \log \frac{\log z}{\log w} + \frac{A_2}{\log w}
\end{aligned}$$

folgt. Also gilt

$$\sum_{w \leq p < z} \frac{\omega(p)}{p} \leq \kappa \log \frac{\log z}{\log w} + \frac{A_2}{\log w}. \tag{1}$$

Ebenfalls durch partielle Summation erhalten wir aus $(\Omega_2(\kappa))$:

$$\begin{aligned}
\sum_{e \leq p < z} \frac{\omega(p)}{p \log p} &\leq \frac{\kappa \log \frac{z}{w} + A_2}{\log^2 z} + 2 \cdot \int_w^z \frac{\kappa \log \frac{t}{w} + A_2}{t \log^3 t}\, dt \\
&= \frac{\kappa}{\log z} - \kappa \cdot \frac{\log w}{\log^2 z} + \frac{A_2}{\log^2 z} + 2\kappa \cdot \left(-\frac{1}{\log z} + \frac{1}{\log w} - \log w \cdot \left(\frac{1}{2\log^2 w} - \frac{1}{2\log^2 z}\right)\right) \\
&\quad + 2A_2 \cdot \left(\frac{1}{2\log^2 w} - \frac{1}{2\log^2 z}\right) \\
&= -\frac{2\kappa}{\log z} + \frac{\kappa}{\log w} + \kappa \cdot \frac{\log w}{\log^2 z} + \frac{A_2}{\log^2 w} \leq \frac{1}{\log w} \cdot \left(\kappa + \frac{A_2}{\log w}\right).
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\sum_{w \leq p < z} \frac{\omega(p)}{p \log p} \leq \frac{1}{\log w} \cdot \left(\kappa + \frac{A_2}{\log w}\right). \tag{2}$$

Die Wahl $w = p$ und $z = p + \epsilon$ in $(\Omega_2(\kappa))$ führt zu

$$\frac{\omega(p)}{p \log p} \leq A_2. \tag{3}$$

Aus (Ω_1), also $0 \leq \frac{\omega(p)}{p} \leq 1 - \frac{1}{A_1}$ folgt

$$g(p) := \frac{\omega(p)}{p \cdot \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)} \leq A_1 \cdot \frac{\omega(p)}{p}. \tag{4}$$

Aus (2), (3) und (4) erhalten wir

$$\sum_{w\le p<z}\frac{\omega(p)}{p}\le A_1A_2\cdot\sum_{w\le p<z}\frac{\omega(p)}{p\log p}\le\frac{A_1A_2}{\log w}\cdot\left(\kappa+\frac{A_2}{\log w}\right). \tag{5}$$

Es ist $g(p)=\frac{\omega(p)}{p}+\frac{\omega(p)}{p}\cdot g(p)$. Daraus und aus (1) und (5) erhalten wir

$$\sum_{w\le p<z}g(p)\le\kappa\cdot\log\frac{\mathrm{Log} z}{\log w}+\frac{A_2}{\log w}+\frac{A_1A_2}{\log w}\cdot\left(\kappa+\frac{A_2}{\log w}\right). \tag{6}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\frac{W(w)}{W(z)} &= \frac{1}{\prod_{w\le p<z}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)}=\prod_{w\le p<z}(1+g(p))\le\exp\left(\sum_{w\le p<z}g(p)\right)\\ &\le \exp\left(\kappa\cdot\log\frac{\log z}{\log w}+\frac{A_2}{\log w}\cdot\left(1+A_1\kappa+\frac{A_1A_2}{\log z}\right)\right).\end{aligned}$$

Dies beweist Lemma 1.8.2. □

Satz 1.8.1. *(Brunsches Sieb):* (Ω_1), $(\Omega_2(\kappa))$, (R_0), $(R_1(\kappa,\alpha))$
Es seien $b\in\mathbb{N}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ *mit* $0<\lambda e^{1+\lambda}<1$, $c_1=\frac{A_2}{2}\cdot\left(1+A_1\kappa+\frac{A_1A_2}{\log 2}\right)$ *und* $u=\frac{\log X}{\log z}$.
Dann gilt

$$\begin{aligned}S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) &\le XW(z)\cdot\left(1+2\cdot\frac{\lambda^{2b+1}e^{2\lambda}}{1-\lambda^2e^{2+2\lambda}}\exp\left((2b+3)\cdot\frac{c_1}{\lambda\log z}\right)\right.\\ &\left.+O\left(Lz^{-\alpha u+2b+\frac{2{,}01}{e^{\frac{2\lambda}{\kappa}}-1}}u^{C_0+1}\log^{C_0+\kappa+1}z\right)+O_u\left(u^{-\kappa}\log^{-u}X\right)\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}S(\mathcal{A},\mathcal{P},z) &\ge XW(z)\cdot\left(1-2\cdot\frac{\lambda^{2b}e^{2\lambda}}{1-\lambda^2e^{2+2\lambda}}\exp\left((2b+2)\cdot\frac{c_1}{\log z}\right)\right.\\ &\left.+O\left(Lz^{-\alpha u+2b-1+\frac{2{,}01}{e^{\frac{2\lambda}{\kappa}}-1}}u^{C_0+1}\log^{C_0+\kappa+1}z\right)+O_u\left(u^{-\kappa}\log^{-u}X\right)\right).\end{aligned}$$

Die O- Konstanten können von A_0', A_1, A_2, κ und u abhängen. Sie hängen nicht von λ oder b ab.

Beweis. Da wir für die in den O- Symbolen implizierten Konstanten beliebig große, aber feste Werte annehmen dürfen, können wir in der Folge annehmen, dass

$$z\ge B \tag{1}$$

mit einer festen, aber beliebig großen Konstanten B ist. Es sei

$$\Lambda=\frac{2\pi}{\kappa}\cdot\frac{1}{1+\epsilon}\quad\text{mit}\quad\epsilon=\frac{1}{200\epsilon^{1/\kappa}}. \tag{2}$$

Wir definieren dann die Folge (z_n) durch

$$\log z_n=e^{-n\Lambda}\log z \tag{3}$$

für $n=1,\dots,r-1$ und $z_r=2$.

Dabei wird r so gewählt, dass

$$\log z_{r-1} = e^{-(r-1)\Lambda} \log z > \log 2$$

und

$$e^{-r\Lambda} \log z \le \log 2,$$

so dass

$$e^{(r-1)\Lambda} < \frac{\log z}{\log 2} \le e^{r\Lambda} \tag{4}$$

gilt. Dann ist die Bedingung von Definition 1.8.1

$$2 = z_r < z_{r-1} < \ldots < z_1 < z_0 = z$$

erfüllt. Die Funktionen $\chi_\nu(d)$ für $\nu = 1, 2$ seien durch die Definition 1.8.1 gegeben. Nach Lemma 1.8.1 sind die Bedingungen (KS) des Kombinatorischen Siebs erfüllt, und wir haben nach Satz 1.7.1

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_2(d)|\mathcal{A}_d| \le S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) \le \sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_1(d)|\mathcal{A}_d|. \tag{5}$$

Wie in früheren Sieben benützen wir die Approximation

$$|\mathcal{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d} X + R_d$$

und behandeln die Beiträge der Hauptglieder

$$X \sum\nolimits_H^{(r)} \quad \text{mit} \quad X \sum\nolimits_H^{(r)} = \sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi^{(r)}(d)\frac{\omega(d)}{d} \tag{6}$$

und den Restgliedern

$$X \sum\nolimits_R^{(r)} = \sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi^{(r)}(d)R_d \tag{7}$$

getrennt.
Nach Satz 1.7.2 haben wir

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_\nu(d)\frac{\omega(d)}{d} = W(z) \cdot \left(1 + (-1)^{\nu-1} \cdot \sum_{p<z} \frac{\omega(p)}{p} \frac{W(p)}{W(z)} \sum(p)\right) \tag{8}$$

mit

$$\sum(p) := \sum_{t|P_{p+,z}} \frac{\chi_\nu(z) \cdot (1 - \chi_\nu(pt))}{t} \omega(t). \tag{9}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{p<z} \frac{\omega(p)}{p} \frac{W(p)}{W(z)} \sum(p) \quad &\le \quad \sum_{n=1}^{r} \sum_{z_n \le p < z_{n-1}} \frac{\omega(p)}{p} \frac{W(p)}{W(z)} \sum_{t|P_{p+,z}} \frac{\chi_\nu(z) \cdot (1 - \chi_\nu(pt))}{t} \omega(t) \\
&\le \quad \sum_{n=1}^{r} \frac{W(z_n)}{W(z)} \sum_{z_n \le p < z_{n-1}} \frac{\omega(p)}{p} \sum_{t|P_{p+,z}} \frac{\chi_\nu(z) \cdot (1 - \chi_\nu(pt))}{t} \omega(t)
\end{aligned}$$

wegen $W(p) \le W(Z_n)$ für $z_n \le p < z_{n-1}$.

Es ist nur dann $\chi_\nu(t)\cdot(1-\chi_\nu(pt))\neq 0$, wenn $\chi_\nu(t)=1$ und $\chi_\nu(pt)=0$ ist, woraus wegen (IV) von (KS) dann $\nu(t)=2b-\nu+2n-1$ folgt. Daraus folgt

$$\sum_{p<z}\frac{\omega(p)}{p}\frac{W(p)}{W(z)}\sum(p)\underset{1=p\cdot t}{\leq}\sum_{n=1}^{r}\frac{W(z_n)}{W(z)}\sum_{\substack{d|P_{z_n,z}\\ \nu(d)=2b-\nu+2n}}\frac{\omega(d)}{d}.$$

Mit

$$\sum_{d|P_{z_n,z}}\frac{\omega(d)}{d}\leq\frac{1}{(2b-\nu+2n)!}\cdot\left(\sum_{z_n\leq p<z}\frac{\omega(p)}{p}\right)^{2b-\nu+2n}$$

erhalten wir

$$\sum_{p<z}\frac{\omega(p)}{p}\frac{W(p)}{W(z)}\sum(p)\leq\sum_{n=1}^{r}\frac{W(z_n)}{W(z)}\cdot\frac{1}{(2b-\nu+2n)!}\cdot\left(\sum_{z_n\leq p<z}\frac{\omega(p)}{p}\right)^{2b-\nu+2n}. \tag{10}$$

Wir setzen

$$c:=\frac{c_1}{\log z} \tag{11}$$

und zeigen im folgenden

$$\frac{W(z_n)}{W(z)}\leq e^{2(n\lambda+c)} \tag{12}$$

für $n=1,\ldots,r$. Nach Lemma 1.8.2 haben wir

$$\begin{aligned}\frac{W(z_n)}{W(z)} &\leq \exp\left(\kappa\log\frac{\log z}{\log z_n}+\frac{A_2}{\log z_n}\cdot\left(1+A_1\kappa+\frac{A_1A_2}{\log 2}\right)\right)\\ &= \exp\left(n\Lambda\kappa+\frac{2c_1e^{n\Lambda}}{\log z}\right)=e^{2c}\cdot\exp\left(n\cdot\left(\Lambda\kappa+\frac{2c_1}{\log z}\cdot\frac{e^{n\Lambda}-1}{n}\right)\right),\end{aligned}$$

also

$$\frac{W(z_n)}{W(z)}\leq e^{2c}\cdot\exp\left(n\cdot\left(\Lambda\kappa+\frac{2c_1}{\log z}\cdot\frac{e^{n\Lambda}-1}{n}\right)\right) \tag{13}$$

für $n=1,\ldots,r-1$. Die Ungleichung (13) gilt auch für $n=r$, da aus (4) die Aussage

$$\frac{\log z}{\log z_n}=\frac{\log z}{\log 2}\leq r\Lambda\kappa$$

folgt. Wegen $\Lambda>0$ haben wir

$$\frac{e^{n\Lambda}-1}{n}\leq\frac{e^{r\Lambda}-1}{r}.$$

Nach (13) ist

$$\frac{e^{r\Lambda}-1}{r}\leq\Lambda\cdot\frac{e^{r\Lambda}}{r\Lambda}\leq\Lambda\cdot\frac{e^{\Lambda}}{\log 2}\cdot\frac{\log z}{\log\frac{\log z}{\log 2}}.$$

Deshalb erhalten wir aus (13)

$$\frac{W(z_n)}{W(z)}\leq e^{2c}\cdot\exp\left(n\Lambda\kappa\cdot\left(1+\frac{2c_1e^{\Lambda}}{\kappa\log 2}\cdot\frac{1}{\log\frac{\log z}{\log 2}}\right)\right)$$

Wegen $z\geq B$ haben wir

$$\frac{W(z_n)}{W(z)}\leq e^{2(n\lambda+c)}$$

für $n=1,\ldots,r$, also (12).

Wegen (10) und (12) erhalten wir

$$\sum(p) \leq \sum_{n=1}^{r} e^{2n\lambda+c} \cdot \left(\sum_{z_n \leq p < z} \frac{\omega(p)}{p} \right)^{2b-\nu+2n}.$$

Wegen

$$\sum_{z_n \leq p < z} \frac{\omega(p)}{p} \leq \sum_{z_n \leq p < z} \log \frac{1}{1-\frac{\omega(p)}{p}} = \log \frac{W(z_n)}{W(z)}$$

und wegen $(2b-\nu+2n)! \geq (2n)!(2n)^{2b-\nu}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{p<z} \frac{\omega(p)}{p} \frac{W(p)}{W(z)} \sum(p) &\leq \sum_{n=1}^{r} e^{2n\lambda+2c} \cdot \frac{(2n\lambda+2c)^{2b-\nu+2n}}{(2b-\nu+2n)!} \\
&\leq e^{2c} \cdot \sum_{n=1}^{r} e^{2n\lambda} \cdot \frac{(2n\lambda+2c)^{2b-\nu} \cdot (2n\lambda+2c)^{2n}}{(2n)!(2n)^{2b-\nu}} \\
&= e^{2c} \cdot \sum_{n=1}^{r} e^{2n\lambda} \cdot \frac{\left(\lambda+\frac{c}{n}\right)^{2b-\nu} \cdot (2n\lambda+2c)^{2n}}{(2n)!} \\
&\leq e^{2c} \cdot (\lambda+c)^{2b-\nu} \cdot \sum_{n=1}^{r} \frac{\left(\lambda+\frac{c}{n}\right)^{2b-\nu} \cdot (2n\lambda+2c)^{2n}}{(2n)!} \\
&\leq e^{2c} \cdot (\lambda+c)^{2b-\nu} \cdot \sum_{n=1}^{r} \frac{\lambda^{2n} \cdot (2ne^{-1})^{2n}}{(2n)!} \cdot \left(1+\frac{c}{n\lambda}\right)^{2n} \cdot \left(e^{1+\lambda}\right)^{2n}.
\end{aligned}$$

Die Folge $(ne^{-1})^n/n!$ ist in n monoton fallend, und es gilt $\left(1+\frac{c}{n\lambda}\right)^{2n} \leq e^{2c/\lambda}$. Damit haben wir

$$\begin{aligned}
\sum_{p<z} \frac{\omega(p)}{p} \frac{W(p}{W(z)} \sum(p) &\leq e^{2c} \cdot (\lambda+c)^{2b-\nu} 2e^{-2} e^{2c/\lambda} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda e^{1+\lambda}\right)^{2n} \\
&= \frac{2\lambda^{2b-\nu+2}}{1-\lambda^2 e^{2+2\lambda}} \cdot \left(1+\frac{c}{\lambda}\right)^{2b-\nu} \cdot e^{2c(1+1/\lambda)} \leq 2\frac{\lambda^{2b-\nu+2} e^{2\lambda}}{1-\lambda^2 e^{2+2\lambda}} \cdot e^{(2b-\nu+4)c/\lambda},
\end{aligned}$$

also

$$\sum_{p<z} \frac{\omega(p)}{p} \frac{W(p}{W(z)} \sum(p) \leq 2\frac{\lambda^{2b-\nu+2} e^{2\lambda}}{1-\lambda^2 e^{2+2\lambda}} \cdot e^{(2b-\nu+4)c/\lambda}. \tag{14}$$

Aus (8) und (14) folgt nun

$$\begin{aligned}
\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_\nu(d) \frac{\omega(d)}{d} &= W(z) \cdot \left(1+\theta \cdot 2\frac{\lambda^{2b-\nu+2} e^{2\lambda}}{1-\lambda^2 e^{2+2\lambda}} \cdot e^{(2b-\nu+4)c/\lambda}\right) \\
&= W(z) \cdot \left(1+\theta \cdot 2\frac{\lambda^{2b-\nu+2}}{1-\lambda^2 e^{2+2\lambda}} \cdot \exp\left((2b+3) \cdot \frac{c_1}{\log z}\right)\right)
\end{aligned}$$

für $\nu = 1, 2$, also

$$\sum_{d|P(z)} \mu(d)\chi_\nu(d) \frac{\omega(d)}{d} = W(z) \cdot \left(1+\theta \cdot 2\frac{\lambda^{2b-\nu+2}}{1-\lambda^2 e^{2+2\lambda}} \cdot \exp\left((2b+3) \cdot \frac{c_1}{\log z}\right)\right). \tag{15}$$

Wir kommen nun zur Behandlung des Beitrages der Restglieder:
Wir beginnen mit der Summe

$$\sum_{d|P(z)} \chi_\nu(d) A^{\nu(d)}$$

für eine Konstante $A \geq 1$. Es gilt

$$\sum_{d|P(z)} \chi_\nu(d) A^{\nu(d)} \leq \left(1 + \sum_{p<z} A\right)^{2b-\nu+1} \prod_{n=1}^{r-1} \left(1 + \sum_{p<z} A\right)^2,$$

wie man durch Ausmultiplizieren der rechten Seite überprüft.
Anwendung der Tschebyschewschen Schranke

$$\pi(z) \leq \frac{2z}{\log z} + b$$

mit einer geeigneten Konstanten b ergibt

$$\sum_{d|P(z)} \chi_\nu(d) A^{\nu(d)} \leq \left(1 + A \cdot \left(\frac{2z}{\log z} + 3\right)^{2b-\nu+1}\right) \cdot \prod_{n=1}^{r-1} \left(1 + A \cdot \left(\frac{2z}{\log z} + 3\right)\right)^2.$$

Damit erhalten wir für hinreichend große C

$$\sum_{d|P(z)} \chi_\nu(d) A^{\nu(d)} \leq \left(\frac{Cz}{\log z}\right)^{2b-\nu+1} \prod_{n=1}^{r-1} \left(\frac{Cz_n e^{n\Lambda}}{\log z}\right)^2. \tag{16}$$

Es ist

$$\prod_{n=1}^{r-1} \left(\frac{Ce^{n\Lambda}}{\log z}\right) = \left(\frac{B^{r\Lambda/2}}{\log z}\right)^{r-1}$$

und wegen

$$e^{r-1/\Lambda} < \frac{\log z}{\log 2} \leq e^{r\Lambda}$$

auch

$$\frac{Be^{r\Lambda/2}}{\log z} \leq \frac{Be^{\Lambda/2}}{\log z} \cdot \left(\frac{\log z}{\log 2}\right)^{1/2} < 1. \tag{17}$$

Weiter ist

$$\prod_{n=1}^{r-1} z_n^2 = \exp\left(2\log z \cdot \sum_{n=1}^{r-1} e^{-n\Lambda}\right) \leq z^{\frac{2}{e^{\Lambda}-1}}. \tag{18}$$

Aus (16), (17) und (18) folgt

$$\sum_{d|P(z)} \chi_\nu(d) A^{\nu(d)} = O\left(z^{2b-\nu+1+\frac{2}{e^{\Lambda}-1}}\right).$$

Es ist

$$e^{2\lambda/\kappa} - e^{\Lambda} \leq \left(\frac{2\lambda}{\kappa} - \Lambda\right) \cdot e^{2\lambda/\kappa} \leq \epsilon^{\Lambda} \cdot e^{1/\kappa},$$

und wegen $e^{\Lambda} - 1 \geq \Lambda$ folgt

$$\frac{e^{2\lambda/\kappa}}{e^{\Lambda}-1} \leq 1 + \frac{\epsilon\Lambda e^{1/\kappa}}{e^{\Lambda}-1} \leq 1 + \epsilon \cdot e^{1/\kappa} = \frac{2,01}{2}.$$

Damit folgt

$$\sum_{d|P(z)} \chi_\nu(d) A^{\nu(d)} = O\left(z^{2b+1-\nu+\frac{2,01}{e^{2\lambda/\kappa}-1}}\right) \tag{19}$$

für $\nu = 1, 2$. Aus (19) folgt nun

$$\begin{aligned}
\sum_{d|P(z)} \chi_\nu(d)|R_d| &\leq \sum_{\substack{d<X^\alpha \log^{-C_0} X \\ p|d \Rightarrow p \in \mathcal{P}}} |R_d| + L \cdot \sum_{\substack{d|P(z) \\ d \geq X^\alpha \log^{-C_0} X}} \left(\frac{X \log X}{d} + 1\right) \cdot A_0'^{\nu(d)} \chi_\nu(d) \\
&\leq O_u\left(\frac{X}{\log^{\kappa+u} X}\right) + 2LX^{1-\alpha} \log^{C_0+1} X \cdot \sum_{d|P(z)} A_0'^{\nu(d)} \chi_\nu(d) \\
&= O_u\left(\frac{X}{\log^{\kappa+u} X} + LX^{1-\alpha} z^{2b+1-\nu+(2,01/e^{2\lambda/\kappa}-1)} \log^{C_0+1} X\right).
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\sum_{d|P(z)} \chi_\nu(d)|R_d| = O\left(\frac{u^{-\kappa}}{\log^u X} + Lz^{-\alpha u+2b+1-\nu+\frac{2,01}{e^{\frac{2\lambda}{\kappa}}-1}} u^{C_0+1} \log^{C_0+\kappa+1} z\right)$$

für $\nu = 1, 2$. $\square$

Wir schließen diesen Abschnitt mit zwei Anwendungen:

Satz 1.8.2. *Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n, für die sowohl n als auch $n+2$ höchstens sieben Primfaktoren haben.*

Lemma 1.8.3. *Es gibt Konstanten λ und u mit $0 < \lambda e^{1+\lambda} < 1$,*

$$1 - \frac{2\lambda^2 e^{2\lambda}}{1 - \lambda^2 e^{2+2\lambda}} > 0 \quad \text{und} \quad 2 + \frac{2,01}{e^\lambda - 1} < u \leq 8.$$

Beweis. (Beweis von Satz 1.8.2)
Wir wenden das Brunsche Sieb (Satz 1.8.1) mit $\mathcal{A} = \{n(n+2) \colon n \leq x\}$ an.
Nach Beispiel 1.3.3 haben wir

$$|\mathcal{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d} X + R_d$$

mit $X = x$, wobei die multiplikative Funktion ω durch $\omega(2) = 1$ und $\omega(p) = 2$ für $p > 2$ bestimmt ist. Wir haben $|R_d| \leq 2^{\nu(d)}$. Die Bedingungen (Ω_0), also $\omega(p) \leq A_0$ und (Ω_1), d.h. $0 \leq \frac{\omega(p)}{p} \leq 1 - \frac{1}{A_1}$ sind mit $A_0 = 2$ und $A_1 = 3$ erfüllt. Nach Satz 1.2.3 gilt

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

Somit ist die Bedingung $(\Omega_2(\kappa))$

$$\sum_{w \leq p < z} \frac{\omega(p) \log p}{p} \leq \kappa \log \frac{z}{w} + A_2$$

mit passendem A_2 für $\kappa = 2$ erfüllt.

Jedes Teilintervall von $(0,x]$ der Länge d mit $\mu^2(d) = 1$ enthält höchstens $2^{\nu(d)}$ Werte n, für die $n(n+2) \in \mathcal{A}_d$ gilt. Das Intervall $(0,x]$ kann durch $(\left[\frac{x}{d}\right]+1)$ solcher Teilintervalle überdeckt werden.. Daher ist die Bedingung (R_0)

$$|R_d| \leq L \cdot \left(\frac{X \log X}{d} + 1 \right) \cdot A_0'^{\nu(d)}$$

für $\nu(d) \neq 0$ mit $L = 1$ und $A_0' = 2$ erfüllt. Wegen $|R_d| \leq 2^{\nu(d)}$ ist die Bedingung $(R_1(\kappa, \alpha))$

$$\sum_{\substack{d < X^\alpha \log^{-C_0} X \\ p|d \Rightarrow p \in \mathcal{P}}} \mu^2(d) |R_d| = O_U \left(\frac{X}{\log^{\kappa+U} X} \right)$$

für $\alpha = 1 - \epsilon$ mit einem beliebig kleinen $\epsilon > 0$ sowie $C_0 > 0$ und $U > 0$ erfüllt.
Es ist

$$W(z) = \frac{1}{2} \prod_{2<p<z} \left(1 - \frac{2}{p} \right).$$

Mit Satz 1.8.1 und der Wahl $b = 1$ erhalten wir

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z) \geq \frac{1}{2} x \cdot \prod_{2<p<z} \left(1 - \frac{2}{p} \right) \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{\lambda^{2b} e^{2\lambda}}{1 - \lambda^2 e^{2+2\lambda}} \exp \left((2b+2) \cdot \frac{c_1}{\log z} \right) \right.$$

$$\left. + O \left(L z^{-\alpha u + 2b - 1 + \frac{2,01}{e^{\frac{2\lambda}{\kappa}} - 1}} u^{C_0+1} \log^{C_0+2} z \right) + O_U \left(u^{-2} \log^{-U} x \right) \right). \tag{1}$$

Wir benutzen folgendes numerisches Resultat:
Es gibt Konstanten λ und u mit $0 < \lambda e^{1+\lambda} < 1$ sowie

$$1 - \frac{2\lambda^2 e^{2\lambda}}{1 - \lambda^2 e^{2+2\lambda}} > 0 \quad \text{und} \quad 2 + \frac{2,01}{e^\lambda - 1} < u \leq 8.$$

Wir setzen $z = x^{1/u}$. Dann strebt die rechte Seite von (1) gegen ∞ für $x \to \infty$. Es gibt somit unendlich viele n, so dass aus $p|n(n+2)$ die Aussage $p \geq n^{1/u}$ folgt.
Es sei $n = p_1 \cdots p_{\tilde{\nu}(n)}$ bzw. $n+2 = p_1 \cdots p_{\tilde{\nu}(n+2)}$ die Zerlegung von n bzw. $n+2$ in nicht notwendigerweise verschiedene Primfaktoren. Wegen $n \geq (n^{1/4})^{\tilde{\nu}(n)}$ und $n+2 \geq (n+2)^{\tilde{\nu}(n+2)/n}$ folgt $\tilde{\nu}(n) \leq 7$ und $\tilde{\nu}(n+2) \leq 7$ für $n \geq n_0$ mit einem hinreichend großen n_0. $\square$

Die obere Schranke für $\pi_2(x)$ geben wir ohne Beweis an.

Satz 1.8.3. *Es gilt*

$$\pi_2(x) = O \left(\frac{x}{\log^2 x} \right).$$

Kapitel 2

Charaktere und Gleichverteilung auf Gruppen

2.1 Gruppen und ihre Charaktere

Durch die analytische Zahlentheorie zieht sich wie ein roter Faden die Idee der Gleichverteilung von Folgen auf Gruppen und das Studium der Gleichverteilung durch Charaktere dieser Gruppen.

Definition 2.1.1. Es seien $(G, \circ)$ und $(H, \star)$ Gruppen mit den Verknüpfungen $\circ$ und $\star$. Eine Abbildung $\Phi \colon G \to H$ heißt Gruppenhomomorphismus, falls

$$\Phi(g_1 \circ g_2) = \Phi(g_1) \star \Phi(g_2)$$

für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt (Relationstreue).
In dieser Vorlesung wird die Gruppe G stets abelsch und H stets $H = \mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ mit der Multiplikation sein. Ist die Gruppe G endlich, so versteht man unter einem Charakter χ von G einen Homomorphismus $\chi \colon G \to \mathbb{C}^*$. Auch für unendliche Gruppen G kann der Begriff des Charakters definiert werden, falls die Gruppe G eine topologische Gruppe ist. Ein Charakter χ von G ist dann ein stetiger Homomorphismus $\chi \colon G \to \mathbb{C}^*$.

Wir werden den Begriff der topologischen Gruppe in dieser Vorlesung nicht benötigen, da wir nur wenige Beispiele von unendlichen Gruppen betrachten. In jedem Fall wird klar sein, was unter Stetigkeit zu verstehen ist.

Satz 2.1.1. *Es sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe. Für jeden Charakter χ von G und für alle $g \in G$ ist dann $\chi(g)$ eine $|G|$- te Einheitswurzel. Insbesondere gibt es nur endlich viele Charaktere von G.*

Definition 2.1.2. Es sei $e(\alpha) := e^{2\pi i \alpha}$.

Wir schließen diesen ersten Abschnitt mit einer Liste der Beispiele, mit der wir uns in dieser Vorlesung beschäftigen werden:

Beispiel 2.1.1. (i) Es sei $q \in \mathbb{N}$ und $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$ die Gruppe der Restklassen modulo q mit der Addition als Verknüpfung. Für $m \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ ergeben sich die Charaktere

$$e_{m,q} \colon \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*,\ r \bmod q \to e\left(\frac{mr}{q}\right).$$

(ii) Es sei $q \in \mathbb{N}$ und $G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^*$ die Gruppe der zu q teilerfremden Restklassen modulo q bzgl. der Multiplikation. Die Charaktere von $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^*$ heißen Dirichletcharaktere modulo q. Ihre Konstruktion ist komplizierter. Wir geben ein Beispiel: Es sei q eine Primzahl. Zu einem Primzahlmodul existiert immer eine Primitivwurzel, so besitzt etwa $q = 7$ die Primitivwurzel $r = 3$. Es ist $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \cdot)^*$ die zyklische Gruppe

$$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, \cdot)^* = \left\{3^0 \bmod 7, 3^1 \bmod 7, \ldots, 3^6 \bmod 7\right\}.$$

Ein Dirichletcharakter χ kann nun dadurch definiert werden, indem man für $\chi(3)$ eine beliebige sechste Einheitswurzel wählt: wir setzen $\chi_m(3) = e\left(\frac{m}{6}\right)$. Wegen der Relationstreue ist χ_m vollständig durch $\chi_m(3^k) = e\left(\frac{km}{6}\right)$ bestimmt.

Nun zu unendlichen Gruppen:

(iii) Es sei $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$. Jedes $z \in \mathbb{C}^*$ hat eine Darstellung $z = e(\alpha)$, wobei α durch die Forderung $\alpha \in [0, 2\pi)$ eindeutig bestimmt ist. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung

$$e_n \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*,\ e(\alpha) \to e(n\alpha)$$

ein Charakter von G. Die Forderung der Stetigkeit ist offenbar erfüllt.

(iv) Es sei $G = (\mathbb{R}, +)$. Für $\nu \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$e_\nu \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*,\ t \to e(\nu t)$$

ein Charakter.

Wir werden (zum Teil in Übungsaufgaben) zeigen, dass wir in den Beispielen stets sämtliche Charaktere der jeweiligen Gruppen beschrieben haben.

2.2 Gruppe der Charaktere, Orthogonalitätsrelation

Bis auf weiteres sei nun $(G, \cdot)$ mit $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ eine endliche abelsche Gruppe mit neutralem Element e.

Definition 2.2.1. Es sei $\hat{G}$ die Menge aller Charaktere von G. Es seien $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$ zwei Charaktere von G. Dann definieren wir das Produkt $\chi_1 \cdot \chi_2$ durch $(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g) \cdot \chi_2(g)$ für alle $g \in G$. Man sieht unmittelbar, dass $\chi_1 \cdot \chi_2$ wieder ein Charakter ist.

Satz 2.2.1. *Es ist $\hat{G}$ eine endliche Gruppe bzgl. der Multiplikation von Charakteren.*

Beweis. Der Charakter $\chi_0 \colon G \to \mathbb{C}^*$, $g \to 1$ ist offenbar ein neutrales Element der Multiplikation. Das Inverse zum Charakter $\chi \in \hat{G}$ ist der konjugiert komplexe Charakter $\overline{\chi} \colon G \to \mathbb{C}^*,\ g \to \overline{\chi(g)}$, da $\chi(g) \circ \overline{\chi(g)} = |\chi(g)| = 1$ für alle $g \in G$ ist. $\square$

Definition 2.2.2. Das neutrale Element χ_0 der Gruppe $\hat{G}$ heißt der triviale Charakter von G. Bei Dirichletcharakteren, im Fall $(G = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^*)$, spricht man auch vom Hauptcharakter. Ein $\chi \in \hat{G}$ mit $\chi \neq \chi_0$ heißt auch nichttrivialer Charakter.

Wir wollen nun die Anzahl der Charaktere $|\hat{G}|$ bestimmen. Dazu benötigen wir zunächst

Lemma 2.2.1. *Für $g \in G - \{e\}$ gibt es stets ein $\chi \in \hat{G}$ mit $\chi(g) \neq 1$.*

Beweis. Es sei $U = \langle g \rangle$ die von g erzeugte zyklische Untergruppe von G, also $U = \{e, g, \ldots, g^{m-1}\}$, somit $|U| = m$. Es sei $G = U \cdot h_1 \,\dot\cup\, U \cdot h_2 \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, U \cdot h_l$ die Zerlegung von G in Rechtsnebenklassen der Untergruppe U. Dann hat jedes $l \in G$ eine eindeutige Darstellung $l = g^s \cdot h_t$. Wir definieren dann den Charakter χ durch $\chi(l) = e\left(\frac{s}{m}\right)$. Man sieht dann leicht, dass χ ein Charakter der Gruppe G ist. Es ist $\chi(g) = e\left(\frac{1}{m}\right) \neq 1$. □

Satz 2.2.2. *(i) Für $\chi \in \hat{G}$ ist*

$$\sum_{g\in G} \chi(g) = \begin{cases} |G|, & \textit{falls} \quad \chi = \chi_0 \\ 0, & \textit{falls} \quad \chi \neq \chi_0. \end{cases}$$

(ii) Für $g \in G$ ist

$$\sum_{\chi\in \hat{G}} \chi(g) = \begin{cases} |\hat{G}|, & \textit{falls} \quad g = e \\ 0, & \textit{falls} \quad g \neq e. \end{cases}$$

Beweis. (i) Der Fall $\chi = \chi_0$ ist klar.
Falls $\chi \neq \chi_0$ ist, gibt es ein $g_\chi \in G$ mit $\chi(g_\chi) \neq 1$. Mit g durchläuft auch $g_\chi \cdot g$ alle Elemente von G. Damit ist

$$\sum_{g\in G} \chi(g) = \sum_{g\in G} \chi(g_\chi \cdot g) = \chi(g_\chi) \sum_{g\in G} \chi(g).$$

Wegen $\chi(g_\chi) \neq 1$ folgt $\sum_{g\in G} \chi(g) = 0$.

(ii) Der Fall $g = e$ ist klar.
Ist $g \neq e$, so gibt es nach Lemma 2.2.1 ein $\chi_g \in \hat{G}$ mit $\chi_g(g) \neq 1$. Mit dem Charakter χ durchläuft nun auch $\chi_g \cdot \chi$ alle Elemente von $\hat{G}$. Damit ist

$$\sum_{\chi\in\hat{G}} \chi(g) = \sum_{\chi\in\hat{G}} (\chi_g \cdot \chi)(g) = \chi_g(g) \sum_{\chi\in\hat{G}} \chi(g).$$

Wegen $\chi_g(g) \neq 1$ folgt $\sum_{\chi\in\hat{G}} \chi(g) = 0$.

□

Satz 2.2.3. *Es ist $|G| = |\hat{G}|$.*

Beweis. Es ist

$$\sum_{\chi\in\hat{G}} \sum_{g\in G} \chi(g) = \sum_{g\in G} \chi_0(g) + \sum_{\chi\neq\chi_0} \sum_{g\in G} \chi(g).$$

Nach Satz 2.2.2 (i) verschwindet die Doppelsumme. Also ist

$$\sum_{\chi\in\hat{G}} \sum_{g\in G} \chi(g) = |G|. \tag{1}$$

Weiter ist

$$\sum_{\chi\in\hat{G}} \sum_{g\in G} \chi(g) = \sum_{\chi\in\hat{G}} \chi(e) + \sum_{g\neq e} \sum_{\chi\in\hat{G}} \chi(g).$$

Nach Satz 2.2.2 (ii) verschwindet auch diese Doppelsumme. Also ist

$$\sum_{\chi\in\hat{G}} \sum_{g\in G} \chi(g) = |\hat{G}| \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. □

Definition 2.2.3. Es sei $F(G,\mathbb{C}) = \{f\colon G \to \mathbb{C}\}$ der Vektorraum über $\mathbb{C}$ aller Funktionen vom Grad n. Wir definieren E_k für $1 \leq k \leq n$ durch

$$E_k(g) := \begin{cases} 1, & \text{für} \quad g = g_k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und nennen $B := \{E_1, \dots, E_n\}$ die "Standardbasis" von $F(G,\mathbb{C})$. Wir definieren auf $F(G,\mathbb{C})$ durch

$$\langle f, h\rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} f(g)\overline{h(g)}$$

für alle $f, h \in F(G,\mathbb{C})$ ein inneres Produkt.

Satz 2.2.4. *Es ist* $\dim F(G,\mathbb{C}) = n$ *und* $f = \sum_{k=1}^{n} f(g_k)E_k$.
Mit dem inneren Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *ist* $F(G,\mathbb{C})$ *ein unitärer Vektorraum.*

Beweis. Man sieht unmittelbar, dass für $f\tilde{f} = \sum_{k=1}^{n} c_k E_k$ dann $\overline{f}(g_k) = c_k$ gilt.
Damit ist klar, dass die obige Form die einzige Darstellung von f als Linearkombination der E_k ist.
Also ist B eine Basis und $\dim(F(G,\mathbb{C})) = n$.
Die Eigenschaften eines inneren Produkts werden leicht nachgeprüft. □

Aus Satz 2.2.2 (i) folgt nun leicht, dass $\hat{G}$ eine Orthonormalbasis von $F(G,\mathbb{C})$ ist.

Satz 2.2.5. *(i) (Orthogonalitätsrelation 1. Art:)*
Es seien $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$. *Dann ist*

$$\langle\chi_1, \chi_2\rangle = \begin{cases} 1, & \textit{falls} \quad \chi_1 = \chi_2 \\ 0, & \textit{sonst,} \end{cases}$$

das heißt

$$\sum_{g\in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = \begin{cases} |G|, & \textit{falls} \quad \chi_1 = \chi_2 \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

(ii) (Orthogonalitätsrelation 2. Art:)
Es seien $g_1, g_2 \in G$. *Dann ist*

$$\sum_{\chi\in\hat{G}} \chi(g_1)\overline{\chi(g_2)} = \begin{cases} |G|, & \textit{falls} \quad g_1 = g_2 \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. (i) Wir wenden Satz 2.2.2 (i) für den Charakter $\chi = \chi_1\overline{\chi_2}$ an. Es ist genau dann $\chi = \chi_0$, wenn $\chi_1 = \chi_2$ ist.

(ii) Nun wenden wir Satz 2.2.2 (ii) für $g = g_1 g_2^{-1}$ an.

□

Bemerkung 2.2.1. Der Teil *(ii)* von Satz 2.2.5 kann aus Teil (i) erhalten werden, wenn in Teil (i) die Gruppe G durch die Gruppe $\hat{G}$ ersetzt wird und man beachtet, dass $\hat{\hat{G}}$ mit G durch $g(\chi) := \chi(g)$ identifiziert werden kann.

Satz 2.2.5 besagt, dass $\hat{G}$ eine Orthonormalbasis (ONB) des Vektorraums $F(G,\mathbb{C})$ ist. Somit ist es möglich, jedes $f \in F(G,\mathbb{C})$ als Linearkombination der χ auszudrücken:

$$f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi \quad \text{oder} \quad f = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}(\chi_j)\chi_j, \tag{1}$$

falls $\hat{G} = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ ist.
Wie auf jedem unitären Vektorraum können die Koeffizienten bezüglich einer ONB durch Bildung des inneren Produkts erhalten werden. Dann folgt aus (1):

$$\langle f, \chi_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \hat{f}(\chi_j)\, \langle \chi_j, \chi_k \rangle = \hat{f}(\chi_k).$$

Definition 2.2.4. Es sei $f \in F(G,\mathbb{C})$.
Für $\chi \in \hat{G}$ heißen die inneren Produkte $\langle f, \chi \rangle$ die (verallgemeinerten) Fourierkoeffizienten von f.
Die Summe $\sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi$ heißt (verallgemeinerte) Fourierreihe von f.

Die obige Diskussion ergibt folgenden

Satz 2.2.6. *Es wird $f \in F(G,\mathbb{C})$ durch seine Fourierreihe dargestellt:*

$$f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi.$$

Satz 2.2.7. *Für $f \in F(G,\mathbb{C})$ gilt die Parsevalsche Gleichung:*

$$\sum_{g \in G} |f(g)|^2 = \sum_{\chi \in \hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2.$$

Beweis. Es ist nach Satz 2.2.6:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} |f(g)|^2 &= \langle f, f \rangle = \left\langle \sum_{\chi_1 \in \hat{G}} \hat{f}(\chi_1)\chi_1, \sum_{\chi_2 \in \hat{G}} \hat{f}(\chi_2)\chi_2 \right\rangle \\ &= \sum_{\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}} \hat{f}(\chi_1)\overline{\hat{f}(\chi_2)}\, \langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \sum_{\chi \in \hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2, \end{aligned}$$

da $\hat{G}$ eine Orthonormalbasis ist. □

Wir kommen nun zu den unendlichen Gruppen in unseren Beispielen:

$$G = (\mathbb{C}^*, \cdot) \quad \text{mit} \quad \hat{G} = \{e_n \colon n \in \mathbb{Z}\},$$

wobei $e_n \colon e(\alpha) \to e(n\alpha)$ ist.
Es stellt sich zunächst die Frage nach den Orthogonalitätsrelationen. Im Falle der endlichen abelschen Gruppen basieren diese auf Satz 2.2.2 (i):
Für $\chi \in \hat{G}$ ist

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} |G|, & \text{falls} \quad \chi = \chi_0 \\ 0, & \text{falls} \quad \chi \neq \chi_0. \end{cases}$$

Wir erhalten ein Analogon für den Fall $G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$, wenn wir die Summe durch ein Integral ersetzen:

$$\int_0^1 e(n\alpha)\, d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{für} \quad n = 0, \quad \text{d.h. } e_n \text{ trivialer Charakter} \\ 0, & \text{für} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Daraus ergeben sich leicht "Orthogonalitätsrelationen 1. Art":

$$\int_0^1 e(n_1\alpha)e(-n_2\alpha)\, d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{für} \quad n_1 = n_2 \\ 0, & \text{für} \quad n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

Das innere Produkt zweier Funktionen auf G sollte also als

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(\alpha)\overline{g(\alpha)}\, d\alpha$$

definiert werden.
Es bleibt die Frage nach der Menge der Funktionen, die betrachtet werden.
Will man mit dem Riemann- Integral auskommen, so muss man sich natürlich auf Riemann- integrierbare Funktionen beschränken.
In der reellen Analysis, wo man das Lebesque- Integral zur Verfügung hat, wählt man dagegen den Vektorraum $L^2(\mathbb{C}^*)$, den Vektorraum der Lebesque- integrierbaren Funktionen f mit endlicher L^2-Norm:

$$\int_0^1 |f(\alpha)|^2\, d\alpha < \infty.$$

Man erhält die <u>klassische Theorie der Fourierreihe</u>:
Es sei $f \in L^2(\mathbb{C}^*)$. Die <u>Fourierreihe</u> von f ist

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e(n\alpha)$$

mit den <u>Fourierkoeffizienten</u>

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(\alpha)e(-n\alpha)\, d\alpha.$$

Die Frage, ob f durch die Fourierreihe dargestellt wird, ist hier wesentlich komplizierter als bei endlichen Gruppen. Es gilt stets <u>Konvergenz im quadratischen Mittel</u>, d.h.

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \left| f(\alpha) - \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e(n\alpha)\right|^2 d\alpha = 0.$$

Die punktweise Konvergenz kann jedoch nur unter starken Zusatzbedingungen, nämlich stetige Differenzierbarkeit, garantiert werden. Es gibt Beispiele für nur stetige Funktionen, bei denen sie nicht gilt.
Die "Orthogonalitätsrelationen 2. Art" sind:

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{-N<n\leq N} e(n(\alpha_1 - \alpha_2)) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad \alpha_1 = \alpha_2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist $G = (\mathbb{R}, +)$ mit $\hat{G} = \{e_\nu : \nu \in \mathbb{R}\}$, wobei $e_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $t \to e(\nu t)$.
Die "Orthogonalitätsrelationen 1. Art" sind hier:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e_{\nu_1}(t)\overline{e_{\nu_2}(t)}\, dt = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad \nu_1 = \nu_2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

An die Stelle der Fourierreihe tritt das Fourierintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e(xt)\,dt$$

mit der Fouriertransformierten

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu)e(-\nu t)\,d\nu.$$

2.3 Gleichverteilung auf Gruppen

Definition 2.3.1. Es sei $(G,\circ)$ eine endliche Gruppe, $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $g_n \in G$ eine Folge von Gruppenelementen. Für $g \in G$ und $x > 0$ sei

$$N(x,g) = |\{n \le x \colon g_n = g\}|\,.$$

Die Folge (g_n) heißt gleichverteilt auf G, falls für alle $g \in G$

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}N(x,g) = |G|^{-1}$$

gilt, d.h. die Folge (g_n) nimmt jeden möglichen Wert asymptotisch gleich oft an.

Eine Grundidee der analytischen Zahlentheorie ist, die Gleichverteilung von Folgen auf Gruppen zur Größe von Charaktersummen in Beziehung zu setzen.

Satz 2.3.1. *Es sei $(G,\circ)$ eine endliche Gruppe mit Charaktergruppe $\hat{G}$, dessen neutrales Element der triviale Charakter χ_0 ist. Es sei $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge von Elementen von G. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Die Folge (g_n) ist gleichverteilt auf G.

(ii) Für jeden Charakter $\chi \ne \chi_0$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{k\le x}\chi(g_k) = 0.$$

Beweis. $(i) \to (ii)$:
Es sei $\chi \ne \chi_0$. Dann ist

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{k\le x}\chi(g_k) = \sum_{g\in G}\lim_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{\substack{k\le x\\ g_k=g}}\chi(g) = \sum_{m\in G}\chi(g)\lim_{x\to\infty} x^{-1}N(x,g) = \frac{1}{|G|}\sum_{m\in G}\chi(g) = 0.$$

$(ii) \to (i)$:
Es sei $g \in G$. Nach den Orthogonalitätsrelationen 2. Art (Satz 2.2.5 (ii)) ist

$$N(x,g) = \sum_{\substack{k\le x\\ g_k=g}} 1 = \sum_{\chi\in\hat{G}}\frac{1}{|G|}\sum_{k\le x}\chi(g_k)\overline{\chi(g)} = \overline{\chi_0(g)}\frac{1}{|G|}\sum_{k\le x}\chi_0(g_k) + \sum_{\chi\ne\chi_0}\overline{\chi(g)}\frac{1}{|G|}\sum_{k\le x}\chi(g_k).$$

Wegen $\chi_0(g) = 1$ und wegen (i) folgt:

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1}N(x,g) = \frac{1}{|G|}\lim_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{k\le x}1 + \sum_{\chi\ne\chi_0}\overline{\chi(g)}\frac{1}{|G|}\left(\lim_{x\to\infty} x^{-1}\sum_{k\le x}\chi(g_k)\right) = \frac{1}{|G|}.$$

□

Kapitel 3

Riemannsche Zeta-Funktion, Dirichletsche L- Reihen und Primzahlverteilung

3.1 Arithmetische Funktionen und Dirichletreihen

Bevor wir nun zur Diskussion der Riemannschen Zeta-Funktion als Funktion der komplexen Variablen $s \in \mathbb{C}$ kommen, wollen wir die allgemeine Funktionsklasse diskutieren, der die Zeta-Funktion angehört: die Dirichletschen Reihen.

Definition 3.1.1. Eine Dirichletreihe ist eine unendliche Reihe der Form

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$ und $s \in \mathbb{C}$.

Es stellt sich sofort die Frage nach dem Konvergenzbereich von $D(s)$ und nach den analytischen Eigenschaften, insbesondere der Holomorphie, von $D(s)$ in diesem Bereich. Im Zusammenhang mit Dirichletschen Reihen ist die Schreibweise $s = \sigma + it$ mit $\sigma = \Re(s)$, $t = \Im(s)$ üblich (oder, falls eine Folge vorliegt, $s_j = \sigma_j + it_j$).

Satz 3.1.1. *Es sei*

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

in s_0 konvergent. Dann konvergiert $D(s)$ gleichmäßig in dem Winkelraum $|\arg(s - s_0)| < \frac{1}{2}\pi - \delta$ für festes $\delta > 0$. Die Funktion $D(s)$ ist in der Halbebene $\{\sigma > \sigma_0\}$ holomorph.

Beweis. Mit Abelscher partieller Summation (Satz 1.2.4) folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{M<n\leq N} a_n n^{-s} &= \sum_{M<n\leq N} a_n n^{-s_0} n^{s_0-s} \\
&= N^{s_0-s} \sum_{M<n\leq N} a_n n^{-s_0} - \int_M^N \left(\sum_{M<n\leq u} a_n n^{-s_0} \right) (s_0 - s) u^{s_0-s-1} du \, .
\end{aligned}$$

Es ist $|N^{s_0-s}| = N^{\sigma_0-\sigma} \leq 1$. Wegen der Konvergenz von $\sum a_n n^{-s_0}$ ist

$$\left| \sum_{M<n\leq u} a_n n^{-s_0} \right| < \varepsilon$$

für $M > M_0(\varepsilon)$ groß genug und jedes $u > M$, und damit

$$\left| N^{s_0-s} \cdot \sum_{M<n\leq N} a_n n^{-s} \right| < \varepsilon$$

im Winkelraum $|\arg(s-s_0)| < \frac{1}{2}\pi - \delta$.
Es ist

$$\left|(s_0-s)u^{s_0-s-1}\right| \leq \frac{1}{\sin(\delta)} \cdot (\sigma-\sigma_0)u^{\sigma-\sigma_0-1}$$

und damit

$$\left| \int_M^N \left(\sum_{M<n\leq u} a_n n^{-s_0} \right) (s_0-s)u^{s_0-s-1} du \right| \leq \frac{\varepsilon}{\sin(\delta)} M^{\sigma-\sigma_0} \leq \frac{\varepsilon}{\sin(\delta)}.$$

Damit folgt der erste Teil des Satzes.
Jede kompakte Teilmenge der Halbebene $\{s = \sigma + it \colon \sigma > \sigma_0\}$ ist für ein genügend kleines $\delta > 0$ im Winkelraum $|\arg(s-s_0)| < \frac{1}{2}\pi - \delta$ enthalten. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

ist damit in $\{\sigma > \sigma_0\}$ kompakt konvergent und damit holomorph. □

Satz 3.1.2. *Zu jeder Dirichletreihe*

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

gibt es stets ein $\sigma_c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, so dass $D(s)$ für alle $s = \sigma + it$ mit $\sigma > \sigma_c$ konvergiert und für $\sigma < \sigma_c$ divergiert.

Beweis. Man setze

$$\sigma_c = \inf\left\{\sigma \in \mathbb{R} \colon \exists s = \sigma + it,\ \sum a_n n^{-s} \text{ konvergiert}\right\},$$

und die Behauptung folgt dann aus dem vorigen Satz. □

Definition 3.1.2. Der Wert σ_c heißt Konvergenzabszisse der Dirichletreihe $D(s)$.

Die Fälle $\sigma_c = \pm\infty$ können eintreten:

Beispiel 3.1.1. Die Dirichletreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n n^{-s}$$

konvergiert für kein $s \in \mathbb{C}$, hat also die Konvergenzabszisse $\sigma_c = \infty$. Dagegen konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} n^{-s}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ und hat die Konvergenzabszisse $\sigma_c = -\infty$.

Auch alle Dirichletpolynome

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

wobei $a_n \neq 0$ nur endlich oft auftritt, haben die Konvergenzabszisse $\sigma_c = -\infty$.

Definition 3.1.3. Es sei f eine arithmetische Funktion. Für alle $s \in \mathbb{C}$, für die

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$$

konvergiert, heißt $F(s)$ die Erzeugende Dirichletreihe von f.

Satz 3.1.3. *Es seien f, g, h arithmetische Funktionen mit $h = f \star g$. Die zugehörigen Erzeugenden Dirichletreihen seien F, G und H. Falls F und G in $s_0 \in \mathbb{C}$ absolut konvergieren, so ist für dieses s_0 auch H absolut konvergent, und es ist $H(s_0) = F(s_0)G(s_0)$.*

Beweis. Nach dem Großen Umordnungssatz ist

$$\begin{aligned} F(s_0)G(s_0) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} f(k)k^{-s_0}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} g(m)m^{-s_0}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{km=n} f(k)g(m)(km)^{-s_0}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} h(n)n^{-s_0} = H(s_0), \end{aligned}$$

und letzte unendliche Reihe ist absolut konvergent. $\square$

Ist die Funktion f multiplikativ, so kann die Erzeugende Dirichletreihe von f unter gewissen Voraussetzungen als sogenanntes Eulerprodukt dargestellt werden.

Satz 3.1.4. *Es sei f eine multiplikative Funktion und $s \in \mathbb{C}$. Ist*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$$

absolut konvergent, so ist

$$F(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}}\left(\sum_{\alpha=0}^{\infty} f\left(p^{\alpha}\right)p^{-\alpha s}\right).$$

Beweis. Aus der absoluten Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ folgt die Konvergenz von $\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{\alpha\geq 1}\left|f(p^{\alpha})p^{-\alpha s}\right|$ und daraus die Konvergenz des unendlichen Produkts $M := \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} f(p^{\alpha})p^{-\alpha s}\right)$.
Es sei $p^+(n)$ der größte Primfaktor von n. Dann gilt für alle $x \geq 1$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} - \prod_{p\leq x}\sum_{\alpha=0}^{\infty} f(p^{\alpha})p^{-\alpha s}\right| = \left|\sum_{p^+(n)>x} f(n)n^{-s}\right| \leq \sum_{n>x}|f(n)n^{-s}|.$$

Daraus folgt die Behauptung für $x \to \infty$. $\square$

3.2 Die Koeffizientensumme einer Dirichletreihe

Entscheidend für den funktionentheoretischen Beweis des Primzahlsatzes ist die Möglichkeit, die Koeffizientensummen von Dirichletreihen durch Kurvenintegrale auszudrücken.

Satz 3.2.1. *(Riemanns Methode der komplexen Integration)*
Es sei

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

für $\sigma > 1$ absolut konvergent.
Mit einer für $x \geq x_0$ monoton wachsenden und positiven Funktion $\Phi(x)$ und einer Konstanten $C > 0$ sei $|a_n| < C \cdot \Phi(x)$ für alle $n \leq x$. Es sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-\sigma} = O\left((\sigma - 1)^{-\alpha}\right)$$

für $\sigma \to 1^+$ und für ein festes $\alpha > 0$ sowie $c > 1$, $x > 1$, $x \notin \mathbb{Z}$ sowie $T > 0$. Dann gilt

$$\sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} D(s) \frac{x^s}{s} \, ds + O\left(\frac{x^c}{T \cdot (\sigma - 1)^{\alpha}}\right) + O\left(\frac{x \cdot \Phi(2x) \cdot \log(2x)}{T}\right) + O\left(\frac{x \cdot \Phi(2x)}{T \cdot \|x\|}\right)$$

für $T \to \infty$, wobei $\|x\|$ den Abstand von x zur nächsten ganzen Zahl bedeute.

Zur Vorbereitung beweisen wir

Satz 3.2.2. *(Perronsche Formel)*
Es sei $c > 0$, $T > 0$ und $y > 0$. Dann gilt für $T \to \infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} \, ds = \begin{cases} 1 + O\left(\frac{y^c}{T \cdot |\log(y)|}\right), & \text{falls } y > 1 \\ O\left(\frac{y^c}{T \cdot |\log(y)|}\right) & \text{falls } 0 < y < 1. \end{cases}$$

Beweis. Es sei $y > 1$. Für $U > 0$ ist nach dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{-U-iT}^{c-iT} \frac{y^s}{s} \, ds + \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} \, ds + \int_{c+iT}^{-U+iT} \frac{y^s}{s} \, ds + \int_{-U+iT}^{-U-iT} \frac{y^s}{s} \, ds \right) = \mathrm{Res}_{s=0} \left(\frac{y^s}{s} \right) = 1,$$

wenn im positiven Sinn über die geradlinigen Verbindungsstrecken integriert wird. Es ist

$$\left| \int_{c+iT}^{-U+iT} \frac{y^s}{s} \, ds \right| \leq \frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty}^{c} y^{\sigma} \, d\sigma = O\left(\frac{y^c}{T \cdot |\log(y)|}\right)$$

und analog

$$\left| \int_{-U-iT}^{c-iT} \frac{y^s}{s} \, ds \right| \leq \int_{-U}^{c} \frac{y^{\sigma}}{\sqrt{T^2 + \sigma^2}} \, d\sigma \leq \frac{y^c}{T \cdot |\log y|} = O\left(\frac{y^c}{T \cdot |\log(y)|}\right).$$

bzw.

$$\left| \int_{-U-iT}^{-U+iT} \frac{y^s}{s} \, ds \right| \leq \int_{-T}^{T} \frac{y^{-U}}{|s|} \, ds \leq \frac{2Ty^{-U}}{U} \underset{U \to \infty}{\to} 0.$$

Also ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} \, ds = 1 + O\left(\frac{y^c}{T \cdot |\log(y)|}\right).$$

Es sei $0 < y < 1$. Für $U > 0$ ist nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{U-iT}^{c-iT} \frac{y^s}{s}\,ds + \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s}\,ds + \int_{c+iT}^{U+iT} \frac{y^s}{s}\,ds + \int_{U+iT}^{U-iT} \frac{y^s}{s}\,ds\right) = 0,$$

wobei wiederum über die geradlinigen Verbindungsstrecken integriert wird. Es ist

$$\begin{aligned}
\left|\int_{c+iT}^{U+iT} \frac{y^s}{s}\,ds\right| &\leq \frac{1}{T}\int_c^\infty y^\sigma\,d\sigma = O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right)\\
\left|\int_{U-iT}^{c-iT} \frac{y^s}{s}\,ds\right| &= O\left(\frac{y^c}{T\cdot|\log(y)|}\right)\\
\left|\int_{U-iT}^{U+iT} \frac{y^s}{s}\,ds\right| &= O\left(\frac{T\cdot y^U}{|\log(y)|}\right) \underset{U\to\infty}{\to} 0,
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Beweis. (Beweis von Satz 3.2.1)
Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$$

auf $[c-iT, c+iT]$ erhalten wir mit der Perronschen Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} D(s)\frac{x^s}{s}\,ds = \sum_{n=1}^\infty a_n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}\right) = \sum_{n<x} a_n + O\left(\frac{x^c}{T}\sum_{n=1}^\infty \frac{|a_n|}{n^c\cdot|\log(\frac{x}{n})|}\right). \quad (1)$$

Wir spalten die Summe

$$\Sigma_0 := \sum_{n=1}^\infty \frac{|a_n|}{n^c\cdot\log|(\frac{x}{n})|}$$

in $\Sigma_0 = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$ mit

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \sum_{n<\frac{x}{2}} \frac{|a_n|}{n^c\cdot|\log(\frac{x}{n})|}\\
\Sigma_2 &= \sum_{n>2x} \frac{|a_n|}{n^c\cdot|\log(\frac{x}{n})|}\\
\Sigma_3 &= \sum_{\frac{x}{2}\leq n\leq 2x} \frac{|a_n|}{n^c\cdot|\log(\frac{x}{n})|}
\end{aligned}$$

auf. Für $n < \frac{x}{2}$ und $n > 2x$ ist $|\log(\frac{x}{n})| \geq \log(2)$, also

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 = O\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{|a_n|}{n^c}\right) = O\left((c-1)^{-\alpha}\right) \quad (2)$$

nach Voraussetzung.

Wir kommen zum schwierigsten Teil, der Abschätzung von Σ_3. Es sei N eine natürliche Zahl, die x am nächsten liegt. Für $N < n \leq 2x$ sei $r = n - N$. Wir haben wegen $x \leq N + \frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$\log\left(\frac{n}{x}\right) \geq \log\left(\frac{N+r}{N+\frac{1}{2}}\right) = \log\left(1 + \frac{r-\frac{1}{2}}{N+\frac{1}{2}}\right).$$

Im folgenden seien $c_0 > 0$ und $c_1 > 0$ feste Konstanten. Aus dem Mittelwertsatz schließen wir, dass $\log(1+u) \geq c_0 u$ für $0 \leq u \leq 1$ ist und erhalten

$$\log\left(1 + \frac{r - \frac{1}{2}}{N + \frac{1}{2}}\right) \geq c_0 \frac{r - \frac{1}{2}}{N + \frac{1}{2}} \geq c_1 \cdot \frac{r}{x}.$$

Also haben wir

$$\sum_{N < n \leq 2x} \frac{|a_n|}{n^c \cdot |\log(\frac{x}{n})|} = O\left(\Phi(2x) \cdot x^{1-c} \cdot \sum_{1 \leq r \leq 2x} \frac{1}{r}\right) = O\left(\Phi(2x) \cdot x^{1-c} \cdot \log(2x)\right). \tag{3}$$

Analog folgt

$$\sum_{\frac{x}{2} \leq n < N} \frac{|a_n|}{n^c \cdot |\log(\frac{x}{n})|} = O\left(\Phi(2x) \cdot x^{1-c} \cdot \log(2x)\right). \tag{4}$$

Für $n = N$ erhalten wir

$$\frac{|a_n|}{N^c \cdot |\log(\frac{x}{N})|} = O\left(\frac{\Phi(N)}{N^c \cdot |\log\left(1 + \frac{x-N}{N}\right)|}\right) = O\left(\frac{\Phi(2x) \cdot x^{1-c}}{\|x\|}\right). \tag{5}$$

Aus den Abschätzungen (1) bis (5) folgt die Behauptung des Satzes. □

3.3 Die Riemannsche Zeta-Funktion und Dirichletsche L- Reihen

Definition 3.3.1. Es sei $q \in \mathbb{N}$.
Eine arithmetische Funktion $\chi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt ein Dirichletcharakter modulo q, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\chi \neq 0$

(ii) $\chi(n+q) = \chi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(iii) $\chi(n) = 0 \Leftrightarrow (n,q) > 1$

(iv) $\chi(mn) = \chi(m) \cdot \chi(n)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

Der Dirichletcharakter χ_0 mit

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (q,n) = 1, \\ 0, & \text{falls } (q,n) > 1 \end{cases}$$

heißt Hauptcharakter modulo q.
Ein Dirichletcharakter χ modulo q kann zu einer Funktion $\chi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ durch folgende Festsetzung fortgestzt werden:
Für $z \in \mathbb{Z}$ wähle k, so dass $z + kq \in \mathbb{N}$ und setze $\chi(z) = \chi(z + kq)$.

Definition 3.3.2. Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q.
Die zu χ gehörige Dirichletsche L- Reihe $L(s,\chi)$ ist durch

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}$$

für $\sigma > 1$ definiert. Im Spezialfall $q = 1$ erhält man die Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

Satz 3.3.1. *Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Die Dirichletsche L- Reihe $L(s,\chi)$ stellt für $\sigma > 1$ eine holomorphe Funktion dar. Sie besitzt dort das* <u>*Eulerprodukt*</u>

$$L(s,\chi) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}.$$

Insbesondere ist $L(s,\chi) \neq 0$, und es ist

$$L(s,\chi)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\chi(n)n^{-s}.$$

Beweis. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}$$

konvergiert für $\sigma > 1$.
Der Beweis für die Existenz des Eulerprodukts verläuft analog zum Beweis für das Eulerprodukt für die Riemannsche Zetafunktion. □

Satz 3.3.2. *(Eulersche Summenformel)*
Es seien $a < x$ reelle Zahlen. Die Funktion $g\colon [a,x] \to \mathbb{C}$ sei stetig und (stückweise) stetig differenzierbar auf $[a,x]$. Wir setzen $P_0(x) := x - [x] - 1/2$. Dann ist

$$\sum_{a<n\leq x} g(n) = \int_a^x g(u)\,du + \int_a^x P_0(u)g'(u)\,du - g(x)P_0(x) + g(a)P_0(a).$$

Beweis. Übungen. □

Satz 3.3.3. *Die Riemannsche Zeta-Funktion lässt sich meromorph auf den Bereich $\{\sigma > 0\}$ fortsetzen. Die einzige Singularität ist ein Pol erster Ordnung in $s = 1$ mit Residuum 1.*

Beweis. Anwendung der Eulerschen Summenformel für $\Re(s) > 1$ und einem beliebig kleinen $\epsilon > 0$ ergibt

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \int_{1-\epsilon}^{\infty} u^{-s}\,du + s\int_{1-\epsilon}^{\infty} P_0(u)u^{-s-1}\,du + (1-\epsilon)^{-s}\cdot P_0(1-\epsilon) \\ &\underset{\epsilon\to 0}{=} \int_1^{\infty} u^{-s}\,du + s\int_1^{\infty} P_0(u)u^{-s-1}\,du + \frac{1}{2} = \frac{1}{s-1} + s\int_1^{\infty} \frac{u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2}}{u^{s+1}}\,du + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wegen $|P_0(u)| = |u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ ist die Folge

$$\int_1^N \frac{u - \lfloor u \rfloor - \frac{1}{2}}{u^{s+1}}\,du$$

in der Halbebene $\Re(s) > 0$ kompakt konvergent. Also stellt

$$s\int_1^{\infty} P_0(u)u^{-s-1}\,du$$

eine in $\Re(s) > 0$ holomorphe Funktion dar. Die übrigen Summanden sind dort ebenfalls holomorph, außer in $s = 1$, da dort $\frac{1}{s-1}$ einen Pol erster Ordnung mit Residuum 1 aufweist. □

Satz 3.3.4. *Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q.*

(i) Ist $\chi = \chi_0$ der Hauptcharakter modulo q, so konvergiert die Dirichletreihe $L(s, \chi_0)$ für $\sigma > 1$. Es ist

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \cdot \prod_{p|q} (1 - p^{-s}).$$

Dann lässt sich $L(s, \chi_0)$ auf den Bereich $\{\sigma > 0\}$ meromorph fortsetzen. Die einzige Singularität ist ein Pol erster Ordnung mit Residuum

$$\mathrm{Res}_{s=1} L(s, \chi_0) = \prod_{p|q} (1 - p^{-1}).$$

(ii) Ist $\chi \neq \chi_0$, so konvergiert $L(s, \chi)$ für $\sigma > 0$ und ist dort auch holomorph.

Beweis. (i) Es gilt

$$\begin{aligned} L(s, \chi_0) &= \prod_{p \in \mathbb{P}} 1 - \chi_0(p) p^{-s})^{-1} = \prod_{p \nmid q} (1 - p^{-s})^{-1} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1} \cdot \prod_{p|q} (1 - p^{-s}) \\ &= \zeta(s) \cdot \prod_{p|q} (1 - p^{-s}). \end{aligned}$$

Die übrigen Eigenschaften folgen aus den Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion.

(ii) Abelsche partielle Summation ergibt (zunächst für $\sigma > 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} = \int_1^{\infty} \left(\sum_{n \leq t} \chi(n) \right) t^{-s-1} \, dt. \tag{$*$}$$

Es sei $mq \leq t < (m+1)q$. Dann ist

$$\sum_{n \leq t} \chi(n) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{kq \leq n < (k+1)q} \chi(n) + \sum_{mq \leq t < (m+1)q} \chi(n).$$

Wegen

$$\sum_{kq \leq n < (k+1)q} \chi(n) = 0$$

folgt

$$\left| \sum_{n \leq t} \chi(n) \right| \leq q.$$

Damit ist $(*)$ für $\sigma > 0$ konvergent.

□

3.4 Der Primzahlsatz und der Primzahlsatz für arithmetische Progressionen

Wir wollen in diesem Abschnitt eine schärfere Version des Primzahlsatzes

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

beweisen. Der Beweis benützt analytische Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s)$.
Eine noch allgemeinere Fragestellung ist die Verteilung der Primzahlen auf arithmetischen Progressionen $a \bmod q$, die eng mit den Eigenschaften der Dirichletschen L- Reihen $L(s, \chi)$ mit den Dirichletcharakteren $\chi \bmod q$ zusammenhängt.
Die Überlegungen, die zum Beweis des Primzahlsatzes für arithmetische Progressionen führen, können weitgehend durch nur leichte Abänderung der entsprechenden Überlegungen für den Beweis des Primzahlsatzes gewonnen werden. Eine Ausnahme bildet der Nachweis der grundlegenden Tatsache $L(1, \chi) \neq 0$ für $\chi \neq \chi_0$.

Definition 3.4.1. Es seien $a, q \in \mathbb{N}$ und $x \geq 1$. Wir setzen

$$\pi(x, q, a) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \bmod q}} 1,$$

die Anzahl der Primzahlen kleiner gleich x in der arithmetischen Progression $a \bmod q$.

Definition 3.4.2. Die Funktion $\Lambda \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{falls } n = p^m \text{ für eine Primzahl } p \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

heißt <u>von- Mangoldtsche- Funktion</u>. Die summatorischen Funktionen

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \quad \text{bzw.} \quad \vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$$

heißen <u>Tschebyscheffsche ψ- Funktion</u> bzw. <u>Tschebyscheffsche ϑ- Funktion</u>.

Für den Fall der arithmetischen Progressionen führen wir folgende Verallgemeinerungen ein:

Definition 3.4.3. Es seien $a, q \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Wir setzen

$$\begin{aligned} \psi(x, q, a) &= \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \bmod q}} \Lambda(n) \\ \psi(x, \chi) &= \sum_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n) \\ \vartheta(x, q, a) &= \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \bmod q}} \log p. \end{aligned}$$

Satz 3.4.1. *(i) Es ist $\psi(x) = \vartheta(x) + O(x^{1/2} (\log x)^2)$.*
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\pi(x) = \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right)$ für $x \to \infty$ (Primzahlsatz)

(b) $\psi(x) = x + o(x)$ für $x \to \infty$

(c) $\vartheta(x) = x + o(x)$ für $x \to \infty$.

(ii) Es seien $a, q \in \mathbb{N}$. Es ist $\psi(x,q,a) = \vartheta(x,q,a) + O(x^{1/2}(\log x)^2)$.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\pi(x,q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right)$ *für* $x \to \infty$ *(Primzahlsatz für arithmetische Progressionen)*

(b) $\psi(x,q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot x + o(x)$ *für* $x \to \infty$

(c) $\vartheta(x,q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot x + o(x)$ *für* $x \to \infty$.

Beweis. Der Teil (i) ist ein Spezialfall von (ii). Daher genügt es, (ii) zu beweisen.
Es gilt

$$\psi(x,q,a) - \vartheta(x,q,a) = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{\substack{p^m \le x \\ p^m \equiv a \bmod q}} \log p \le (x^{1/2} + \ldots + x^{1/k_0}) \log x,$$

wobei k_0 so gewählt ist, dass $\frac{1}{2} < x^{1/k_0} \le 2$ ist. Es ist $k_0 = O(\log x)$ für $x \to \infty$. Also folgt

$$\psi(x,q,a) - \vartheta(x,q,a) = O(x^{1/2}(\log x)^2),$$

woraus sofort $a) \Leftrightarrow b)$ folgt.
Es bleibt also noch $a) \Leftrightarrow c)$ zu zeigen.
$a) \Rightarrow c)$:
Mit Abelscher partieller Summation ist

$$\vartheta(x,q,a) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv a \bmod q}} \log p = \pi(x,q,a) \log x - \int_{1/2}^{x} \frac{\pi(t,q,a)}{t} \, dt.$$

Es ist

$$\int_{1/2}^{x} \frac{\pi(t,q,a)}{t} \, dt = \int_{3/2}^{x} \frac{\pi(t,q,a)}{t} \, dt \le \int_{3/2}^{x^{1/2}} \frac{\pi(t,q,a)}{t} \, dt + O\left(\int_{x^{1/2}}^{x} \frac{\pi(t,q,a)}{t} \, dt\right) = O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Also folgt $\vartheta(x,q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + o(x)$ aus a). $c) \Rightarrow a)$:
Wiederum gilt mit Abelscher partieller Summation

$$\pi(x,q,a) = \sum_{\substack{p \le x \\ p \equiv a \bmod q}} \frac{\log p}{\log p} = \frac{\vartheta(x,q,a)}{\log x} + \int_{3/2}^{x} \frac{\vartheta(t,q,a)}{t(\log t)^2} \, dt = \frac{\vartheta(x,q,a)}{\log x} + O\left(\int_{3/2}^{x} \frac{dt}{(\log t)^2}\right).$$

Dabei ist

$$\int_{3/2}^{x} \frac{dt}{(\log t)^2} = \int_{1/2}^{x^{1/2}} \frac{dt}{(\log t)^2} + \int_{x^{1/2}}^{x} \frac{dt}{(\log t)^2} = O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

□

Satz 3.4.2. *(i) Für $\sigma > 1$ gilt*

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}.$$

(ii) Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Dann gilt für $\sigma > 1$

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) n^{-s}.$$

Beweis. Teil (i) ist der Spezialfall $q = 1$ von (ii). Es genügt daher wieder, (ii) zu beweisen.
Wir betrachten das Eulerprodukt

$$L(s, \chi) = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$$

zunächst für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$. Es sei Log die auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ definierte holomorphe Funktion, die für $s \in (0, \infty)$ die Bedingung $\mathrm{Log} s = \log s$ erfüllt. Es existiert ein s_0, so dass für alle $s \geq s_0$

$$\sum_p |\arg(1 - \chi(p)p^{-s})| < \pi$$

gilt. Aus dem Eulerprodukt folgt für $s \geq s_0$

$$\mathrm{Log}\ L(s, \chi) = -\sum_p \log(1 - \chi(p)p^{-s}).$$

Differenzieren ergibt

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum_p \frac{\chi(p)(\log p)p^{-s}}{1-\chi(p)p^{-s}} = -\sum_p \chi(p)p^{-s}\log p \sum_{m=0}^{\infty} \chi(p)^m p^{-ms} = -\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \chi(p^m)\log p (p^m)^{-s}.$$

Nach dem Großen Umordnungssatz ist

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-s}$$

für $s \in [s_0, \infty)$.
Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen gilt dies aber für alle $s = \sigma + it$ mit $\sigma > 1$. □

Satz 3.4.3. *Es sei $a, q \in \mathbb{N}$ mit $(a, q) = 1$ sowie χ_0 der Hauptcharakter.*

(i) Es ist $\psi(x, q, a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)}\psi(x, \chi)$.

(ii) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\psi(x, q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + o(x)$ für alle a mit $(a, q) = 1$.

(b) $\psi(x) = x + o(x)$ und $\psi(x, \chi) = o(x)$ für alle $\chi \neq \chi_0$.

Beweis. (i) Nach den Orthogonalitätsrelationen 2. Art (Satz 2.2.5 (ii)) gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)}\psi(x,\chi) &= \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)} \sum_{n \leq x} \chi(n)\Lambda(n) \\ &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left(\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)}\chi(n) \right) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \bmod q}} \Lambda(n) \\ &= \psi(x, q, a).\end{aligned}$$

(ii) $a) \Rightarrow b)$:
Es gelte $\psi(x,q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + o(x)$ für alle a mit $(a,q) = 1$.
Dann ist $\psi(x) = \sum_{(a,q)=1} \psi(x,q,a) + O(1) = x + o(x)$ und

$$\psi(x,\chi) = \sum_{n \le x} \chi(n)\Lambda(n) = \sum_{\substack{(a,q)=1 \\ a \bmod q}} \chi(a) \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv a \bmod q}} \Lambda(n) + O(1) = \frac{x}{\varphi(q)} \sum_{a \bmod q} \overline{\chi(q)} + o(x) = o(x).$$

$b) \Rightarrow a)$:
Es sei $\psi(x) = x + o(x)$ und $\psi(x,\chi) = o(x)$ für $\chi \neq \chi_0$. Dann gilt für $(a,q) = 1$

$$\begin{aligned} \psi(x,q,a) &= \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv a \bmod q}} \Lambda(n) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)}\chi(n) \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{n \le x} \chi_0(n)\Lambda(n) + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi(a)}\psi(x,\chi) = \frac{x}{\varphi(q)} + o(x). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.4.1. Satz 3.4.3 (ii) ist im wesentlichen das Gleichverteilungskriterium (Satz 2.3.1) für die Folge ($p_j \bmod q$) auf der Gruppe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^*$, wobei p_j die j- te Primzahl mit $p_j \not| q$ ist. Anstelle der Folge ($p_j \bmod q$) betrachtet man die mit Gewichten $\log p_j$ versehene Folge ($p_j \bmod q$), die noch durch die $n = p^m$ mit $m > 1$ leicht verändert wird.

Wir wenden nun Satz 3.2.1 über die Koeffizientensumme einer Dirichletreihe auf die Dirichletreihe

$$D(s) = -\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\Lambda(n)n^{-s}$$

an, deren Koeffizientensumme gerade $\psi(x,\chi)$ ist.

In Zukunft schreiben wir bei den logarithmischen Ableitungen $\frac{L'}{L}$ bzw. $\frac{\zeta'}{\zeta}$ die Argumente (s,χ) nur noch einmal.
Wir werden den Primzahlsatz für arithmetische Progressionen

$$\psi(x,q,a) \sim \frac{x}{\varphi(q)}$$

mit einem schärferen Restglied beweisen, was auch ein schärferes Restglied im Primzahlsatz für $\pi(x,q,a)$ zur Folge hat. Dabei muss nun allerdings die einfache Näherungsfunktion $\frac{x}{\log x}$ durch den Integrallogarithmus

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

ersetzt werden. Obwohl im einfachen Primzahlsatz für arithmetische Progressionen eine Abhängigkeit der im O- Term impliziten Konstanten von q zugelassen wäre, wollen wir im Hinblick auf spätere Anwendungen darauf verzichten.

Satz 3.4.4. *Es sei $x = m + \frac{1}{2}$ für $m \in \mathbb{N}$ und $c = c(x) = 1 + \frac{1}{\log x}$. Dann ist*

$$\psi(x,\chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \cdot \log x^2}{T}\right).$$

Die im O- Term implizierte Konstante ist von q unabhängig.

Beweis. Wir wenden Satz 3.2.1 mit $a_n = \chi(n)\Lambda(n)$ auf

$$D(s) = -\frac{L'}{L}(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\Lambda(n)n^{-s}$$

mit der Koeffizientenbeschränkung $\Phi(x) = \log x$ an. Für $\sigma > 1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)n^{-\sigma} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) = O\left((\sigma - 1)^{-1}\right)$$

für $\sigma \to 1^+$, da $-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ in $s = 1$ einen Pol erster Ordnung besitzt. Es kann also $\alpha = 1$ im Satz 3.2.1 gewählt werden. Die drei Restglieder des Satzes sind alle durch

$$O\left(\frac{x \cdot \log(x)^2}{T}\right)$$

beschränkt. □

Wir werden im folgenden den Integrationsweg $[c - iT, c + iT]$ zu einer geschlossenen Kurve ergänzen, die ein Rechteck R im positiven Sinne berandet, und zwar zur Kurve

$$\gamma = [c - iT, c + iT] \cup [c + iT, a + iT] \cup [a + iT, a - iT] \cup [a - iT, c - iT]$$

für $a < 1 < c$. Im Falle $\chi \neq \chi_0$ wird der Integrand $-\frac{L'}{L}(s, \chi)\frac{x^s}{s}$ eine Singularität im Inneren des Rechtecks R haben. Im Falle $\chi = \chi_0$ wird die einzige Singularität des Integranden $-\frac{L}{L}(s, \chi_0) \cdot \frac{x^s}{s}$ im Inneren des Rechtecks R der Pol in $s = 1$ sein. Das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(-\frac{L'}{L}(s, \chi)\right) \frac{x^s}{s} \, ds$$

wird dann durch den Residuensatz ausgewertet. Dazu muss sichergestellt werden, dass $L(s, \chi)$ im Inneren von R keine Nullstellen besitzt, d.h. zum Beweis des Primzahlsatzes benötigt man die Existenz einer nullstellenfreien Zone, welche wir im folgenden diskutieren wollen.
Wir wissen nach Satz 3.3.1, dass $L(s, \chi) \neq 0$ für $\sigma > 1$ gilt.
Entscheidend für den Beweis des Primzahlsatzes durch Hadamard und de la Vallée-Poussin im Jahre 1896 war die Tatsache, dass $\zeta(s)$ auch auf der Geraden $\sigma = 1$ keine Nullstellen besitzt. Diese Tatsache reicht für den Beweis des Primzahlsatzes aus, liefert jedoch nur die Asymptotik. Der Beweis für $\zeta(1 + it) \neq 0$ beinhaltet jedoch auch die Grundidee für den Beweis des Primzahlsatzes.

Definition 3.4.4. Es sei χ_0 der Hauptcharakter. Dann sei

$$E(q, \chi) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \chi = \chi_0 \\ 0, & \text{wenn } \chi \neq \chi_0. \end{cases}$$

Satz 3.4.5. *Es sei $q \in \mathbb{N}$, χ ein Dirichletcharakter modulo q und $M \in \mathbb{N}$.*
Dann ist die Funktion $L(s, \chi)$ auf die ganze Ebene meromorph fortsetzbar. Ist $\chi = \chi_0$, so ist der einzige Pol von $L(s, \chi)$ bei $s = 1$. Ist $\chi \neq \chi_0$, so ist $L(s, \chi)$ in der ganzen Ebene holomorph.
Weiter gilt für alle $s = \sigma + it$ mit $\sigma > -M$

$$L(s, \chi) - E(q, \chi) \cdot \frac{\varphi(q)}{q(s-1)} = O_M\left(|s|^{M+1} \cdot q^{M+2}\right).$$

Beweis. Aus der Eulerschen Summenformel (Satz 3.3.2) erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}(qm+a)^{-s} &= \int_0^{\infty}(qu+a)^{-s}\,du - qs\int_0^{\infty}(qu+a)^{-s-1}P_0(u)\,du - \frac{1}{2}\cdot a^{-s}\\ &= \frac{a^{-s+1}}{s-1} - \frac{a^{-s}}{2} - qs\int_0^{\infty}(qu+a)^{-s-1}P_0(u)\,du.\end{aligned}$$

Wir definieren die Funktionen P_l für $l \in \mathbb{N}$ durch $P_{l+1}'(u) = P_l(u)$ sowie

$$\int_0^1 P_l(u)\,du = 0$$

und erhalten durch wiederholte partielle Integration

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}(qu+a)^{-s-1}P_0(u)\,du &= \left[\frac{1}{2}\cdot q(s+1)(qu+a)^{-s-2}\right]_0^{\infty} - \sum_{l=2}^{\infty} l!\cdot P_l(0)\cdot q^l\cdot a^{-s-l-1}\\ &\quad + q^M\cdot(s+1)\cdots(s+M)\cdot\int_0^{\infty}(qu+a)^{-s-M-1}\,du,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{\infty}(qm+a)^{-s} &= \frac{a^{-s-1}}{1-s} - \frac{a^{-s}}{2} - \sum_{l=2}^{M-1} l!\cdot P_l(0)\cdot q^l\cdot a^{-s-l}\\ &\quad + q^{M+1}\cdot s\cdot(s+1)\cdots(s+M)\cdot\int_0^{\infty}(qu+a)^{-s-M-1}P_M(u)\,du,\end{aligned}$$

wobei

$$H(s) := \int_0^{\infty}(qu+a)^{-s-M-1}P_M(u)\,du$$

eine für $\Re(s) > -M$ holomorphe Funktion darstellt. Wir erhalten

$$\sum_{m=0}^{\infty}(qm+a)^{-s} - \frac{a^{-s-1}}{s-1} = O_M\left(q^{M+1}\cdot|s|^{M+1}\right).$$

Wegen

$$\sum_{a=1}^{q}\chi(a) = \begin{cases}\varphi(q) & \text{für } \chi = \chi_0\\ 0 & \text{für } \chi \neq \chi_0\end{cases}$$

erhalten wir

$$\sum_{a=1}^{q}\chi(a)\cdot\frac{a^{-s+1}}{s-1} = E(q,\chi)\cdot\frac{\varphi(q)}{s-1} + h(q,\chi,s)$$

mit

$$E(q,\chi) = \begin{cases}1 & \text{für } \chi = \chi_0\\ 0 & \text{für } \chi \neq \chi_0\end{cases}$$

und einer holomorphen Funktion $h(q,\chi,s)$ mit $h(q,\chi,s) = O\left(q^{M+2}\right)$. Insgesamt erhalten wir für $\Re(s) > -M$

$$L(s,\chi) - E(q,\chi)\cdot\frac{\varphi(q)}{q(s-1)} = O_M\left(|s|^{M+1}\cdot q^{M+2}\right),$$

also die Behauptung. □

Satz 3.4.6. *(Borel-Carathéodory)*
Die Funktion f sei auf einem Gebiet, das die Kreisscheibe $|s| \leq R$ enthält, holomorph. Es sei $f(0) = 0$ und $\Re(f(s)) \leq M$ für alle $|s| \leq R$. Für $|s| \leq r < R$ gilt dann

$$\begin{aligned} |f(s)| &\leq \frac{2Mr}{R-r} \\ |f'(s)| &\leq \frac{2MR}{(R-r)^2}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| \leq \frac{2M}{R^k} \tag{1}$$

für alle $k \geq 1$. Die Substitution $s = R \cdot e(\theta)$ ergibt mittels der Cauchyschen Integralformel

$$\int_0^1 f(R \cdot e(\theta))\, d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R} f(s) \frac{ds}{s} = f(0) = 0. \tag{2}$$

Für $k > 0$ haben wir

$$\int_0^1 f(R \cdot e(\theta)) e(k\theta)\, d\theta = \frac{R^{-k}}{2\pi i} \int_{|s|=R} f(s) s^{k-1}\, ds = 0 \tag{3}$$

und

$$\int_0^1 f(R \cdot e(\theta)) e(-k\theta)\, d\theta = \frac{R^k}{2\pi i} \int_{|s|=R} f(s) s^{-k-1}\, ds = \frac{R^k f^{(k)}(0)}{k!}. \tag{4}$$

Indem wir eine Linearkombination von (2),(3) und (4) bilden, erhalten wir für beliebige $\phi \in \mathbb{R}$

$$\int_0^1 f(R \cdot e(\theta))(1 + \cos(2\pi(k\theta + \phi)))\, d\theta = \frac{R^k \cdot e(-\phi) \cdot f^{(k)}(0)}{2k!}$$

und

$$\Re \left(\frac{\frac{1}{2} R^k \cdot e(-\phi) \cdot f^{(k)}(0)}{k!} \right) \leq M \int_0^1 (1 + \cos(2\pi(k\theta + \phi)))\, d\theta = M \tag{5}$$

für alle $k > 0$.
Wir wählen ϕ so, dass $e(-\phi) f^{(k)}(0) = |f^{(k)}(0)|$ ist. Die Gleichung (1) folgt dann aus (5). Aus (1) folgt weiter

$$|f(s)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| r^k \leq 2M \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^k = \frac{2Mr}{R-r}$$

sowie

$$|f'(s)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f^{(k)}(0)| k r^{k-1}}{k!} \leq \frac{2M}{R} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{r}{R} \right)^{k-1} = \frac{2MR}{(R-r)^2}.$$

□

Bemerkung 3.4.2. Zum besseren Verständnis der folgenden Sätze ist folgende Vorbetrachtung nützlich: Es sei f ein Polynom mit (möglicherweise mehrfachen) Nullstellen $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$, d.h. es gelte $f(s) = c(s - \varrho_1) \cdots (s - \varrho_m)$. Differenzieren des Logarithmus ergibt

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{s - \varrho}. \tag{$*$}$$

Es sei nun eine Kreisscheibe $|s-s_0| < \frac{r}{2}$ gegeben, so dass $|s_0-\varrho_j| \leq \frac{r}{2}$ für $1 \leq j \leq k$ und $|s_0-\varrho_j| > \frac{r}{2}$ für $k+1 \leq j \leq m$ gilt. Dann folgt aus $(*)$ für $|s-s_0| \leq \frac{r}{4}$

$$\left| \frac{f'(s)}{f(s)} - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{s-\varrho_j} \right| \leq \frac{4m}{r}.$$

Nun lässt sich dieses Ergebnis auf Funktionen verallgemeinern, die nicht notwendigerweise Polynome sind und möglicherweise auch unendlich viele Nullstellen haben. Der nächste Satz gibt eine teilweise Antwort unter gewissen Bedingungen.

Satz 3.4.7. *Es sei f holomorph in einem Gebiet, das die Kreisscheibe $|s-s_0| \leq r$ umfasst. Es sei $M > 1$ so gewählt, dass*

$$\left| \frac{f(s)}{f(s_0)} \right| < e^M$$

auf der Kreisscheibe $|s-s_0| \leq r$ erfüllt ist. Dann gilt mit einer absoluten Konstante $A > 0$

$$\left| \frac{f'(s)}{f(s)} - \sum_{\varrho} \frac{1}{s-\varrho} \right| < \frac{A \cdot M}{r}$$

für $|s-s_0| \leq \frac{r}{4}$, wobei ϱ alle Nullstellen von f mit $|\varrho - s_0| \leq \frac{r}{2}$ entsprechend ihrer Vielfachheit durchläuft.

Beweis. Die Funktion

$$g(s) = f(s) \cdot \prod_{\varrho} \frac{1}{s-\varrho}$$

ist für $|s-s_0| \leq r$ holomorph und auf der kleineren Kreisscheibe $|s-s_0| \leq \frac{r}{2}$ von null verschieden. Auf dem Rand $|s-s_0| = r$ gilt $|s-\varrho| \geq \frac{r}{2} \geq |s_0-\varrho|$, und damit

$$\left| \frac{g(s)}{g(s_0)} \right| = \left| \frac{f(s)}{f(s_0)} \right| \cdot \left| \prod_{\varrho} \frac{s_0-\varrho}{s-\varrho} \right| \leq \left| \frac{f(s)}{f(s_0)} \right| < e^M$$

nach Voraussetzung.
Nach dem Maximumsprinzip gilt diese Ungleichung dann auch auf der Kreisscheibe $|s-s_0| \leq r$. Wir setzen

$$h(s) = \operatorname{Log}\left(\frac{g(s)}{g(s_0)} \right),$$

wobei Log die holomorphe Funktion sei, die aus $\log\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch analytische Fortsetzung hervorgeht. Dann ist $h(s)$ holomorph für $|s-s_0| \leq \frac{r}{2}$. Zudem ist $h(s_0) = 0$ und $\Re(h(s)) = M$. Nach Satz 3.4.6 ist

$$|h'(s)| \leq \frac{2M \cdot \frac{r}{2}}{(\frac{r}{2} - \frac{r}{4})^2} \leq \frac{A \cdot M}{r}$$

für $|s-s_0| \leq \frac{r}{4}$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Satz 3.4.8. *Die Funktion f sei holomorph in einem Gebiet, das die Kreisscheibe $|s-s_0| < r$ umfasst. Es sei*

$$\left| \frac{f(s)}{f(s_0)} \right| < e^M$$

mit $M > 1$ für $|s-s_0| < r$, und f habe keine Nullstellen im Halbkreis $\{|s-s_0| \leq r \colon \Re(s) > \Re(s_0)\}$.

Dann gilt

$$-\Re\left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}\right) < \frac{A \cdot M}{r}.$$

Hat f eine Nullstelle ϱ_0 auf der Strecke zwischen $s_0 - \frac{r}{2}$ und s_0, so gilt

$$-\Re\left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}\right) < \frac{A \cdot M}{r} - \frac{1}{s_0 - \varrho_0}.$$

Dabei ist A eine absolute Konstante.

Beweis. Nach Satz 3.4.7 gilt

$$-\Re\left(\frac{f'(s_0)}{f(s_0)}\right) < \frac{A \cdot M}{r} - \sum_{|\varrho - s_0| \leq \frac{r}{2}} \Re\left(\frac{1}{s_0 - \varrho}\right).$$

Aus $\Re(\frac{1}{s_0-\varrho}) \geq 0$ für alle ϱ in der Summe folgt die Behauptung. □

Entscheidend für den Beweis des Primzahlsatzes durch Hadamard und de la Vallée-Poussin war der Nachweis, dass die Riemannsche Zetafunktion keine Nullstellen auf $\sigma = 1$ besitzt.
Wir beginnen mit dem Beweis dieser Tatsache.

Satz 3.4.9. *(Hadamard und de la Vallée-Poussin)*
Für $t \neq 0$ ist $\zeta(1 + it) \neq 0$.

Beweis. Wir verwenden die Ungleichung

$$3 + 4\cos(\theta) + \cos(2\theta) \geq 0 \tag{1}$$

für alle $\theta \in \mathbb{R}$.
Angenommen $\zeta(s)$ besitzt eine Nullstelle der Ordnung $m_1 \geq 1$ in $s = 1 + i\gamma$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}$ und eine Nullstelle der Ordnung $m_2 \geq 0$ in $s = 1 + 2i\gamma$. Für $\sigma > 1$ sei

$$\varphi(s) = 3\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + 4\frac{\zeta'}{\zeta}(s + i\gamma) + \frac{\zeta'}{\zeta}(s + 2i\gamma).$$

Diese Funktion besitzt in $s = 1$ die Laurententwicklung

$$\varphi(s) = -\frac{3}{s-1} + \frac{4m_1}{s-1} + \frac{m_2}{s-1} + h(s)$$

mit einer in $s = 1$ holomorphen Funktion $h(s)$. Es folgt

$$\lim_{\sigma \to 1^+} (\Re(\varphi(\sigma))) = \infty.$$

Andererseits ist nach Satz 3.4.2

$$\varphi(\sigma) = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma}\left(3 + 4n^{-i\gamma} + n^{-2i\gamma}\right),$$

also wegen $(R_1(\kappa, \alpha))$

$$\Re(\varphi(\sigma)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma}\left(3 + 4\cos(\gamma \log(n)) + \cos(2\gamma \log(n))\right) \leq 0$$

ein Widerspruch. □

Dieser Satz lässt sich auch auf Dirichletsche L- Reihen ausdehnen.

Satz 3.4.10. *Es sei $\chi^2 \neq \chi_0$ oder $t > 0$. Dann gilt $L(1+it, \chi) \neq 0$.*

Beweis. Angenommen $L(s,\chi)$ besitzt eine Nullstelle der Ordnung $m_1 \geq 1$ in $s = 1+i\gamma$ und $L(s,\chi)$ besitzt eine Nullstelle der Ordnung $m_2 \geq 0$ in $s = 1+2i\gamma$. Dann können $L(s,\chi)$ bzw. $L(s,\chi^2)$ keine Polstellen in $s = 1+i\gamma$ bzw. $s = 1+2i\gamma$ besitzen, da $\gamma \neq 0$ oder aber $\chi \neq \chi_0$ bzw. $\chi^2 \neq \chi_0$ ist.
Wir setzen

$$\varphi(s,\chi) = 3\frac{L'}{L}(s,\chi_0) + 4\frac{L'}{L}(s+i\gamma,\chi) + \frac{L'}{L}(s+2i\gamma,\chi^2).$$

Diese Funktion besitzt in $s = 1$ die Laurententwicklung

$$\varphi(s,\chi) = -\frac{3}{s-1} + \frac{4m_1}{s-1} + \frac{m_2}{s-1} + h(s,\chi)$$

mit einer in $s = 1$ holomorphen Funktion $h(s,\chi)$. Es folgt

$$\lim_{\sigma\to 1^+} (\Re(\varphi(\sigma,\chi))) = \infty.$$

Andererseits ist nach Satz 3.4.2

$$\Re(\varphi(\sigma)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\chi_0(n)n^{-\sigma}\left(3\chi_0(n) + 4\chi(n)n^{-i\gamma} + \chi(n)^2 n^{-2i\gamma}\right) \leq 0$$

ein Widerspruch. □

Die Nullstellenfreiheit von $\zeta(s)$ bzw. $L(s,\chi)$ auf $\sigma = 1$ reicht für den Beweis des Primzahlsatzes bzw. des Primzahlsatzes für arithmetische Progressionen aus. Man erhält allerdings nur die Asymptotik. Will man Aussagen mit Restglied, so benötigt man nullstellenfreie Zonen links der Geraden $\sigma = 1$. Diese Ergebnisse können durch eine Erweiterung der in den Sätzen 3.4.7 und 3.4.8 enthaltenen Grundideen erreicht werden.

Definition 3.4.5. Es sei χ ein Dirichletcharakter modulo q sowie $T \geq 0$ und $\beta_0 \in \mathbb{R}$.
Mit $N(T,\chi,\beta_0)$ bezeichnen wir die Anzahl der Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ von $L(s,\chi)$ mit $0 \leq \gamma < T$ und $\beta \geq \beta_0$.

Satz 3.4.11. *Für $q \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ sei $\mathcal{L} = \log q + \log(|t|+2)$.
Es sei χ ein Dirichletcharakter modulo q, $T \geq 0$ und $M \in \mathbb{N}$.
Es ist $N(T+1,\chi,2(M+3)) - N(T,\chi,2(M+3)) = O_M(\mathcal{L})$ Für alle $s = \sigma + it$ mit $\sigma \geq -M$ gilt*

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = \frac{E(q,\chi)}{s-1} - \sum_{\substack{\varrho:\ L(\varrho,\chi)=0 \\ |\varrho - s| \leq 1}} \frac{1}{s-\varrho} + O_M(\mathcal{L}).$$

Beweis. □

Satz 3.4.12. *(Nullstellenfreie Zone für Dirichletsche L- Reihen)*

(i) Es sei $\chi^2 \neq \chi_0$ oder $|t| \geq 1$. Dann gibt es eine absolute Konstante $c_0 > 0$, so dass

$$L(s,\chi) \neq 0 \tag{$*$}$$

für $\sigma \geq 1 - 2c_0\mathcal{L}^{-1}$ gilt. Für $\sigma \geq 1 - c_0\mathcal{L}^{-1}$ ist

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = O(\mathcal{L}^2). \tag{$**$}$$

(ii) *Es sei $\chi^2 = \chi_0$. Dann gibt es eine absolute Konstante $c_1 > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Es sei $0 < \delta < c_1$. Dann gilt für alle Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ mit $|\gamma| \geq \frac{\delta}{\log q}$*

$$\beta \leq 1 - \frac{\delta}{R\mathcal{L}},$$

wobei $R > 0$ eine absolute Konstante ist. Für $\sigma \geq 1 - \frac{\delta}{10\mathcal{L}}$ gilt

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = O(\mathcal{L}^2).$$

Beweis. (i) Wir nehmen an, $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ sei eine Nullstelle der Ordnung $m_1 \geq 1$ von $L(s,\chi)$, wobei $\gamma_0 \geq 0$, $\beta_0 = 1 - \frac{d_0}{\mathcal{L}_\gamma}$ mit $d_0 > 0$ und $\mathcal{L}_\gamma = \log q + \log(\gamma + 2)$ gelte. Wir setzen

$$h(s,\chi) = 3 \cdot \frac{L'}{L}(s,\chi_0) + 4 \cdot \frac{L'}{L}(s,\chi) + \frac{L'}{L}(s,\chi^2)$$

und $\sigma_0 = 1 + \frac{4d_0}{\mathcal{L}_\gamma}$. Wir haben für $\sigma > 1$

$$\frac{L'}{L}(s,\chi_0) = \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + O\left(\sum_{p|q} (\log p) p^{-\sigma} \sum_{m \geq 0} p^{-m\sigma}\right) = \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + O(\log q)$$

und damit

$$\frac{L'}{L}(\sigma,\chi) = -\frac{1}{\sigma_0 - 1} + O(\mathcal{L}_\gamma). \tag{1}$$

Wir wenden nun Satz 3.4.8 mit $s_0 = \sigma_0 + i\gamma_0$, $r = 1/2$ sowie $f(s) = L(s + i\gamma_0, \chi)$ bzw. $s_0' = \sigma_0 + 2i\gamma_0$, $r = 1/2$ sowie $f(s) = L(s + 2i\gamma_0, \chi^2)$ an. Im folgenden bedeuten c_j stets absolute positive Konstanten. Wegen

$$|L(\sigma_0 + i\gamma_0, \chi)| \geq \prod_p \frac{1}{1 + p^{-\sigma}} \geq \zeta(\sigma_0)^{-1} \geq \frac{c_1}{\sigma_0 - 1}$$

bzw.

$$|L(\sigma_0 + 2i\gamma_0, \chi^2)| \geq \prod_p \frac{1}{1 + p^{-\sigma}} \geq \frac{c_1}{\sigma_0 - 1}$$

haben wir

$$\left|\frac{f(s)}{f(s_0)}\right| \leq e^K \quad \text{bzw.} \quad \left|\frac{f(s)}{f(s_0')}\right| \leq e^K$$

mit $K \leq c_2\mathcal{L}$. Satz 3.4.9 ergibt

$$-\Re\left(\frac{L'}{L}(\sigma_0 + i\gamma_0, \chi)\right) < c_2\mathcal{L} - \frac{1}{\sigma_0 - \beta_0} \tag{2}$$

sowie

$$-\Re\left(\frac{L'}{L}(\sigma_0 + 2i\gamma_0, \chi^2)\right) < c_3\mathcal{L}. \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) erhalten wir

$$\Re(h(\sigma_0,\chi)) \geq -\frac{3}{\sigma_0-1} + \frac{4}{\sigma_0-\beta_0} - c_4\mathcal{L}_\gamma = \frac{\mathcal{L}_\gamma^2}{4d_0^2}\cdot\left(-\frac{15d_0}{\mathcal{L}_\gamma} + \frac{16d_0}{\mathcal{L}_\gamma}\right) - c_4\mathcal{L} = \frac{\mathcal{L}_\gamma}{4} - c_4\mathcal{L}_\gamma. \quad (4)$$

Aus der Darstellung

$$\Re(h(\sigma_0,\chi)) = -\sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma_0}\chi_0(n)\cdot(3+4\cos\theta_n+\cos(2\theta_n)$$

mit $\chi(n) = \cos\theta_n + i\sin\theta_n$ erhalten wir

$$\Re(h(\sigma_0,\chi)) \leq 0. \quad (5)$$

Für hinreichend kleine d_0 stehen (4) und (5) im Widerspruch, womit $(*)$ bewiesen ist.

Es sei nun $s=\sigma+it$ mit $\sigma \geq 1-\frac{c_0}{\mathcal{L}}$. Nach Satz 3.4.11 haben wir mit $M=2$

$$-\frac{L'}{L}(s,\chi) = \frac{E(q,\chi)}{s-1} - \sum_{\substack{\varrho:\ L(\varrho,\chi)=0\\ |s-\varrho|\leq 1}} \frac{1}{s-\varrho} + O(\mathcal{L}).$$

Nach $(*)$ haben wir

$$\frac{1}{|s-\varrho|} = O(\mathcal{L}).$$

Die Anzahl der Summanden ist $\ll N(t+1,\chi,10) - N(t-1,\chi,10) = O(\mathcal{L})$ nach Satz 3.4.11. Daraus folgt $(**)$.

(ii) Wir können $\chi \neq \chi_0$ annehmen, da ansonsten $L(s,\chi)$ in $s=1$ einen Pol erster Ordnung hat. Wir nehmen an, $\varrho_1 = \beta_1 + i\gamma_1$ sei eine Nullstelle der Ordnung $m_1 \geq 1$ von $L(s,\chi)$, wobei $s = \beta_1 + i\gamma_1$, $\gamma_1 = \frac{d_1\delta}{\log q}$ mit $d_1 < 1$ und $\beta_1 = 1 - \frac{d_2\delta}{\log q}$ gelte. Wir setzen

$$\sigma_1 = 1 + \frac{4d_2\delta}{\log q}.$$

Wir wenden nun Satz 3.4.8 mit $s_1 = \sigma_1 + i\gamma_1$, $r = 1/2$ sowie $f(s) = L(s+i\gamma_1,\chi)$ bzw. $s_1' = \sigma_1 + 2i\gamma_1$, $r=1/2$ sowie $f(s) = L(s+2i\gamma_1,\chi^2)\cdot(s-1)$ an. Satz 3.4.9 ergibt

$$-\Re\left(\frac{L'}{L}(\sigma_1+i\gamma_1,\chi)\right) < c_5\mathcal{L} - \frac{1}{\sigma_1-\beta_1}$$

sowie

$$-\Re\left(\frac{L'}{L}(\sigma_1+2i\gamma_1,\chi^2)\right) < c_5\mathcal{L} + \frac{1}{\sigma_1-1}.$$

Wir erhalten

$$\Re(h(\sigma_1,\chi)) \geq -\frac{3}{\sigma_1-1} + \frac{4}{\sigma_1-\beta_1} - \frac{1}{\sigma_1-1} + c_5\mathcal{L},$$

was im Widerspruch zu $\Re(h(\sigma_1,\chi)) \leq 0$ für genügend kleine d_2 steht.

□

Satz 3.4.13. *Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ die Konvergenzabszisse von*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $F(s)$ an der Stelle $s=\alpha$ nicht holomorph.

Beweis. Nach Satz 3.1.1 ist $F(s)$ für $\sigma > \alpha$ holomorph und nach Weierstraß darf $F(s)$ dort differenziert werden. Somit gilt

$$F^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k a_n n^{-s} \log^k n$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\sigma > \alpha$. Für ein $\sigma_0 > \alpha$ gilt daher die Entwicklung

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (s - \sigma_0)^k \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma_0} \log^k n.$$

Wäre $F(s)$ nun an der Stelle $s = \alpha$ holomorph, so müsste diese Entwicklung auch für ein $s = \sigma$ mit $\sigma < \alpha$ konvergieren. Also müsste für ein passendes $\sigma < \alpha$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\sigma_0 - \sigma)^k \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma_0} \log^k n$$

konvergieren. Diese Doppelreihe hat positive Glieder, kann also beliebig umgeordnet werden. Somit gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\sigma_0 - \sigma)^k \log^k n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma_0},$$

womit auch diese Reihe konvergieren würde im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Bemerkung 3.4.3. Unter den Voraussetzungen von Satz 3.4.13 kann trotzdem

$$\lim_{\sigma \to \alpha^+} F(\sigma) < \infty$$

sein, so gilt etwa für $a_n = \log^{-2} n$ mit $n \geq 2$ zum einen $\alpha = 1$ und zum anderen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log^2 n} < \infty.$$

Satz 3.4.14. *Für $\chi^2 = \chi_0$ und $\sigma > 1$ gilt*

$$\zeta(s) \cdot L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

mit $a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \geq 0$ sowie $a_{n^2} \geq 1$.

Beweis. Es gilt

$$\zeta(s) \cdot L(s, \chi) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1},$$

wobei $\chi(p)$ nur die Werte 0 und ± 1 annehmen kann.
Für $\chi(p) = 1$ gilt wegen $\sigma > 1$

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{2}{p^s} + \frac{3}{p^{2s}} + \ldots,$$

für $\chi(p) = -1$

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \ldots$$

und für $\chi(p) = 0$

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \cdot \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots .$$

Durch Multiplikation von Produkten aller drei Typen entsteht eine Dirichletreihe mit nichtnegativen Koeffizienten a_n. Zudem gilt $a_{n^2} \geq 1$, weil in allen drei Fällen die Koeffizienten von p^{-2ms} positiv und größer gleich 1 sind. $\square$

Satz 3.4.15. *Für $\chi^2 = \chi_0$ gilt $L(1,\chi) \neq 0$ und sogar $L(1,\chi) > 0$ für $\chi \neq \chi_0$.*

Beweis. Es ist nur der Fall $\chi \neq \chi_0$ zu betrachten, da ansonsten $L(1,\chi_0) = \infty$ gilt. Die Reihe aus Satz 3.4.14 hat die wegen $a_{n^2} \geq 1$ in $s = 1/2$ divergente Teilreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n^2} n^{-2s},$$

also ist auch die ursprüngliche Reihe selbst für $\sigma < \frac{1}{2}$ divergent. Für ihre Konvergenzabszisse σ_0 gilt somit $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$. Andererseits ist aber $\zeta(s) \cdot L(s,\chi)$ an der Stelle $s = \sigma_0$ wegen Satz 3.4.13 nicht holomorph. Da aber sowohl $\zeta(s)$ als auch $L(s,\chi)$ für $\frac{1}{2} \leq \sigma < 1$ holomorph sind, muss $\sigma_0 = 1$ sein. Dann kann aber $s = 1$ keine Nullstelle von $L(s,\chi)$ sein, denn sonst wäre auch $\zeta(s) \cdot L(s,\chi)$ bei $s = 1$ holomorph, da eine Nullstelle der Ordnung $m \geq 1$ von $L(s,\chi)$ den Pol erster Ordnung von $\zeta(s)$ kompensieren würde. Also gilt $L(1,\chi) \neq 0$ und aus

$$L(1,\chi) = \lim_{\sigma_0 \to 1^+} (\sigma - 1) \cdot \zeta(\sigma) \cdot L(\sigma,\chi)$$

sowie der Nichtnegativität der a_n folgt $L(1,\chi) > 0$. $\square$

Satz 3.4.16. *(Primzahlsatz für arithmetische Progressionen)*
Es sei $q \in \mathbb{N}$ und $(a,q) = 1$. Dann haben wir für feste Konstanten $c(q) > 0$, die nur von q abhängen:

(i) $\psi(x,q,a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O_q\left(x \cdot \exp(-c(q)(\log x)^{1/2})\right)$

(ii) $\pi(x,q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \mathrm{li}(x) + O_q\left(x \cdot \exp(-c(q)(\log x)^{1/2})\right)$

Beweis. Es sei χ ein Dirichletcharakter modulo q. Wir können O.B.d.A. $x = m + \frac{1}{2}$ mit $m \in \mathbb{N}$ annehmen. Nach Satz 3.4.4 ist

$$\psi(x,\chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \cdot (\log x)^2}{T}\right)$$

mit $c = c(x) = 1 + \frac{1}{\log x}$. Nach Satz 3.4.12 gibt es absolute positive Konstanten c_1 und c_2, so dass $L(s,\chi) \neq 0$ für

$$\sigma \geq 1 - \frac{2c_1}{\log(q(|t|+2))} \tag{1}$$

mit $|t| \geq 1$ und für

$$\sigma \geq 1 - c_2|t| \tag{2}$$

mit $|t| < 1$ gilt. Nach Satz 3.4.15 ist $L(1,\chi) \neq 0$. Aus (1), (2) und Satz 3.4.15 folgt die Existenz einer Konstanten $c(q) > 0$ mit $L(s,\chi) \neq 0$ für

$$\sigma \geq 1 - \frac{4c(q)}{\log(|t|+2)}$$

und

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) \le (\log t)^2$$

für

$$\sigma \ge 1 - \frac{2c(q)}{\log(|t|+2)}.$$

Wir ergänzen den Integrationsweg $[c-iT, c+iT]$ zur geschlossenen Kurve

$$\varphi = [c-iT, c+iT] \cup [c+iT, a+iT] \cup [a+iT, a-iT] \cup [a-iT, c-iT]$$

mit $a = 1 - \frac{c(q)}{\log T}$. Für $\chi = \chi_0$ wenden wir den Residuensatz und für $\chi \ne \chi_0$ den Cauchyschen Integralsatz an und erhalten

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{x^s}{s}\,ds = \mathrm{Res}_{s=1}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\cdot\frac{x^s}{s}\right) = E(q,\chi)\cdot x.$$

Aus der Abschätzung

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) = O(\mathcal{L}^2).$$

aus Satz 3.4.12 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{c+iT}^{a+iT} \left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{x^s}{s}\,ds &= O_q\left(\frac{x(\log T)^2}{T}\right)\\
\int_{a-iT}^{c-iT} \left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{x^s}{s}\,ds &= O_q\left(\frac{x(\log T)^2}{T}\right)
\end{aligned}$$

sowie

$$\int_{a-iT}^{a+iT} \left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\right)\frac{x^s}{s}\,ds = O_q\left(x\cdot\exp\left(-c(q)\frac{\log x}{\log T}(\log T)^3\right)\right).$$

Die ersten beiden Restglieder sind in T monoton fallend, während das letzte Restglied dort monoton wächst. Das optimale Restglied wird erreicht, wenn T so gewählt wird, dass beide etwa gleich groß sind, d.h. wenn

$$\frac{x}{T} = x\cdot\exp\left(-\frac{\log x}{T}\right) \Leftrightarrow \log T = (\log x)^{1/2}$$

gilt. □

3.5 Primitive Charaktere und Gaußsche Summen

Definition 3.5.1. Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Es sei $q^*|q$ und χ^* ein Dirichletcharakter modulo q^*. Man sagt, χ wird von χ^* induziert, wenn $\chi = \chi_0\chi^*$ mit dem Hauptcharakter χ_0 mod q ist.
Unter dem Führer von χ versteht man den kleinsten Teiler q^* von q, für den χ von einem Charakter modulo q^* induziert wird. Ist $q^* = q$, so heißt χ primitiv.

Wir beginnen mit einem Kriterium für Primitivität.

Satz 3.5.1. *Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Dann ist χ genau dann nicht primitiv, wenn es einen Teiler q^* von q mit $q^* < q$ gibt, so dass $\chi(1+kq^*) = 1$ für alle k mit $(1+kq^*, q) = 1$ gilt.*

Beweis. "$\Rightarrow$":
Es sei $\chi \bmod q$ nicht primitiv und χ habe den Führer $q^* < q$, und es gelte $\chi = \chi_0\chi^*$ mit einem Dirichletcharakter $\chi^* \bmod q^*$. Dann ist $\chi(1+kq^*) = \chi_0(1+kq^*)\chi^*(1+kq^*)$. Falls $(1+kq^*, q) = 1$ gilt, haben wir $\chi_0(1+kq^*) = 1$ und $\chi^*(1+kq^*) = 1$, also $\chi(1+kq^*) = 1$.

"$\Leftarrow$":
Es sei $q^*|q$ mit $q^* < q$ und $\chi(1 + kq^*) = 1$ für alle k mit $(1 + kq^*, q) = 1$.
Weiter sei $(c, q) = (c + kq^*, q) = 1$. Es existiert das multiplikative Inverse $\overline{c}$ mit $c\overline{c} \equiv 1 \bmod q$ mit $(\overline{c}, c) = 1$. Dann ist $\overline{c}(c + kq^*) \equiv 1 \bmod q^*$ und $\chi(\overline{c}) = \chi(c)^{-1}$, sowie

$$1 = \chi(\overline{c}(c + kq^*)) = \chi(c)^{-1}\chi(c + kq^*).$$

Damit haben wir gezeigt, dass aus $(c, q) = (c + kq^*, q) = 1$ die Aussage

$$\chi(c) = \chi(c + kq^*) \tag{1}$$

folgt. Wir definieren nun χ^* mod q^*. Es sei $(c, q^*) = 1$ und $p_1, \ldots, p_l$ sämtliche Primzahlen, für die $p_j|q$ und $p_j \not| q^*$ gilt. Dann gibt es $k_1, \ldots, k_l$ mit $c + k_jq^* \equiv 1 \bmod p_j$. Es sei k die nach dem Chinesischen Restsatz existierende Lösung des Systems

$$\begin{aligned} k &\equiv k_1 \bmod p_1 \\ &\vdots \\ k &\equiv k_l \bmod p_l. \end{aligned}$$

Dann ist $(c + kq^*, q) = 1$. Wir setzen $\chi^*(c) = \chi(c + kq^*)$. Damit ist χ^* wohldefiniert, da $\chi(c + kq^*)$ nach (1) unabhängig von k ist. Man prüft leicht nach, dass χ^* ein Dirichletcharakter modulo q^* ist und dass $\chi = \chi_0\chi^*$ mit dem Hauptcharakter χ_0 mod q ist. $\square$

Beispiel 3.5.1. Es sei $q = 15$. Der Dirichletcharakter modulo 15 sei durch

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\chi(n)$	1	-1	0	1	0	0	1	-1	0	0	-1	0	1	-1

gegeben. Weiter sei χ^* mod 3 durch

n	1	2	3
$\chi(n)$	1	-1	0

gegeben. Dann ist $\chi = \chi_0\chi^*$ mit χ_0 als dem Hauptcharakter modulo 15. Damit hat χ den Führer 3 und ist nicht primitiv.

Beispiel 3.5.2. Es sei $q = 12$. Die vier Dirichletcharaktere modulo 8 sind durch

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\chi_0(n)$	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
$\chi_1(n)$	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	0	-1
$\chi_2(n)$	1	0	0	0	1	0	-1	0	0	0	-1
$\chi_3(n)$	1	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	1

gegeben. Der Hauptcharakter χ_0 hat den Führer 1 und ist damit nicht primitiv. Charakter χ_2 hat den Führer 4. Er ist ein primitiver Dirichletcharakter modulo 4 aber nicht modulo 8. Schließlich sind χ_1 und χ_3 primitive Dirichletcharaktere modulo 8 und haben somit Führer 8.

Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Durch die Definition $\tilde{\chi}(n \bmod q) = \chi(n)$ erhalten wir die Funktion

$$\tilde{\chi} \colon \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{C}.$$

Nach Satz 2.2.6 kann die Funktion $\tilde{\chi}$ und damit auch χ als Linearkombination der Charaktere der Gruppe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$ dargestellt werden, der Fourierreihe von χ.
Man kann also die Charaktere χ der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \cdot)^*$ als Fourierreihe mit den Charakteren

$$e_{m,q} \colon n \bmod q \to e\left(\frac{mn}{q}\right)$$

der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$ schreiben. Dies ist im Fall der primitiven Charaktere besonders einfach.
Zur Vorbereitung zeigen wir folgenden

Satz 3.5.2. *Es sei $q \in \mathbb{N}$, χ ein primitiver Dirichletcharakter modulo q und $q^*|q$ mit $q^* < q$ und $(l, q^*) = 1$. Dann gilt*

$$\sum_{\substack{0 \le m \le q-1 \\ m \equiv l \bmod q^*}} \chi(m) = 0.$$

Beweis. Es sei

$$S = \sum_{\substack{0 \le m \le q-1 \\ m \equiv l \bmod q^*}} \chi(m) = 0$$

und $r \equiv 1 \bmod q^*$ mit $(r, q) = 1$. Dann ist

$$\chi(r) \cdot \sum_{\substack{0 \le m \le q-1 \\ m \equiv l \bmod q^*}} \chi(m) = \sum_{\substack{0 \le m \le q-1 \\ m \equiv l \bmod q^*}} \chi(rm) = S,$$

da mit m auch rm alle Restklassen, die kongruent $l \bmod q^*$ sind, durchläuft. Wäre $S \neq 0$, so wäre $\chi(r) = 1$ für alle $r \equiv 1 \bmod q^*$ mit $(r, q) = 1$, und damit wäre χ nach Satz 3.5.1 nicht primitiv. □

Definition 3.5.2. (i) Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q.
Unter der Gaußschen Summe $\tau(\chi)$ verstehen wir

$$\tau(\chi) = \sum_{m \bmod q} \chi(m) \cdot e\left(\frac{m}{q}\right).$$

(ii) Es heißt

$$c_q(n) = \sum_{\substack{m \bmod q \\ (m,q)=1}} e\left(\frac{mn}{q}\right)$$

die Ramanujan- Summe.

Bemerkung 3.5.1. Offenbar ist $c_q(1) = \tau(\chi_0)$ mit dem Hauptcharakter $\chi_0 \bmod q$.

Satz 3.5.3. *Es seien $q, n \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$c_q(n) = \sum_{d|(q,n)} d \cdot \mu(q/d).$$

Beweis. Es gilt mit $m = ld$ und $d' = q/d$

$$\begin{aligned} c_q(n) &= \sum_{\substack{m \bmod q \\ (m,q)=1}} e\left(\frac{mn}{q}\right) = \sum_{m \bmod q} e\left(\frac{mn}{q}\right) \cdot \sum_{\substack{d|m \\ d|q}} \mu(d) = \sum_{d|q} \mu(d) \cdot \sum_{l \bmod q/d} e\left(\frac{ln}{q/d}\right) \\ &= \sum_{d'|q} \mu(q/d') \cdot \sum_{l \bmod d'} e\left(\frac{ln}{d'}\right) = \sum_{d'|(q,n)} \mu(q/d')d'. \end{aligned}$$

□

Wir kommen nun zur angekündigten Darstellung von primitiven Charakteren $\chi \bmod q$ als Fourierreihe bzgl. der Gruppe $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +)$.

Satz 3.5.4. *Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein primitiver Dirichletcharakter modulo q. Dann ist*

(i) $|\tau(\chi)| = q^{1/2}$

(ii) Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\chi(a) = \tau(\overline{\chi})^{-1} \cdot \sum_{m \bmod q} \overline{\chi}(m) \cdot e\left(\frac{am}{q}\right).$$

Beweis. (i) Für $(n, q) = 1$ haben wir

$$\tau(\chi) = \sum_{m \bmod q} \chi(m) \cdot e\left(\frac{m}{q}\right) = \chi(n) \cdot \sum_{m \bmod q} \chi(m) \cdot e\left(\frac{mn}{q}\right),$$

da mit m auch nm alle Restklassen modulo q durchläuft. Somit ist

$$\begin{aligned} |\tau(\chi)|^2 &= \sum_{n \bmod q} \chi(n)\overline{\chi(n)} \cdot \sum_{m \bmod q} \chi(m) \cdot e\left(\frac{mn}{q}\right) \cdot e\left(-\frac{n}{q}\right) \\ &= \sum_{m \bmod q} \chi(m) \cdot \sum_{\substack{n \bmod q \\ (n,q)=1}} e\left(\frac{(m-1)n}{q}\right). \end{aligned}$$

Die innere Summe ist die Ramajunan- Summe $c_q(m-1)$. Nach Satz 3.5.3 haben wir

$$|\tau(\chi)|^2 = \sum_{m \bmod q} \chi(m) \cdot \sum_{\substack{d|q \\ d|m-1}} d \cdot \mu(q/d) = \sum_{d|q} d \cdot \mu(q/d) \cdot \sum_{\substack{m \bmod q \\ m \equiv 1 \bmod d}} \chi(m).$$

Wegen der Primitivität von χ verschwindet nach Satz 3.5.2 die innere Summe außer für $d = q$, wo sie den Wert 1 hat. Damit gilt $|\tau(\chi)|^2 = q$.

(ii) Es sei $(a, q) = 1$. Dann haben wir

$$\tau(\overline{\chi}) = \sum_{m \bmod q} \overline{\chi(m)} \cdot e\left(\frac{m}{q}\right) = \sum_{m \bmod q} \overline{\chi(am)} \cdot e\left(\frac{am}{q}\right) = \overline{\chi(a)} \cdot \sum_{m \bmod q} \overline{\chi(m)} \cdot e\left(\frac{am}{q}\right).$$

Daraus folgt die Behauptung, da $\tau(\overline{\chi}) \neq 0$ nach (i) gilt. Für $(a, q) > 1$ verschwinden beide Seiten.

□

Satz 3.5.5. *(Polyà- Vinogradov)*
Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichlet- Charakter modulo q sowie $x \in (0, \infty)$. Dann gilt

$$\sum_{n \leq x} \chi(n) = O\left(q^{1/2} \log q\right).$$

Beweis. □

3.6 Der Primzahlsatz von Page- Siegel- Walfisz

Der Primzahlsatz für arithmetische Progressionen besagt, dass für $q \in \mathbb{N}$ und $(a, q) = 1$

$$\pi(x, q, a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \mathrm{li}(x) \cdot (1 + o(1))$$

gilt. Anders formuliert: zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $x_0 = x_0(q, \epsilon)$, so dass für alle $x \geq x_0$

$$\left| \pi(x, q, a) - \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \mathrm{li}(x) \right| \leq \epsilon \cdot \mathrm{li}(x)$$

gilt. Die Schwäche dieser Aussage liegt nun darin, dass wir keinerlei Kontrolle darüber haben, wie genau x_0 von q abhängt. Bei gegebenem ϵ könnte x_0 als Funktion von q sehr schnell wachsen, z. B. $x_0(\epsilon, q) = x_0(\epsilon) \cdot e^{e^q}$. Die Abhängigkeit von q wird nun in den Sätzen von Page- Siegel- Walfisz und Bombieri untersucht. Auch diese Sätze machen Gebrauch von nullstellenfreien Zonen Dirichletscher L- Reihen, deren Abhängigkeit vom Modul q nun kontrolliert werden muss. Diese Abhängigkeit wurde in Satz 3.4.12 bereits verfolgt, nicht aber in Satz 3.4.15. Aus $L(1, \chi) \neq 0$ folgt lediglich die Existenz einer Umgebung U von $s = 1$ mit $L(s, \chi) \neq 0$ für $s \in U$. Wir haben jedoch keine Kontrolle über die Größe dieser Umgebung in Abhängigkeit von q. Dieser Mangel soll nun behoben werden.

Satz 3.6.1. *Es sei $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Dann gibt es eine absolute Konstante $c_0 > 0$, so dass im Gebiet $|t| < 1$ und $\sigma > 1 - \frac{c_0}{\log q}$ höchstens eine Nullstelle von $L(s, \chi)$ liegt, die im Falle ihrer Existenz reell und einfach ist.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass absolute positive Konstanten c_0 und c_1 existieren, so dass für $q \geq q_0$ die Dirichletsche L- Reihe $L(s, \chi)$ im Gebiet

$$\mathcal{G} = \left\{ s = \sigma + it \colon \sigma > 1 - \frac{c_0}{\log q},\ |t| < \frac{c_1}{\log q} \right\} \tag{1}$$

höchstens eine einfache Nullstelle hat. Wegen

$$\frac{L'}{L}(s, \chi_0) = \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + O(\log q) = -\frac{1}{s-1} + O(\log q)$$

können wir $\chi \neq \chi_0$ annehmen. Nach Satz 3.4.12 können wir ferner auch $\chi^2 = \chi_0$ annehmen. Nach Satz 3.4.11 haben wir

$$-\frac{L'}{L}(s, \chi) = \sum_{\substack{\varrho \colon L(\varrho, \chi) = 0 \\ |\varrho - s| \leq 1}} \frac{1}{s - \varrho} + O_M(\mathcal{L}),$$

d.h. es existiert eine absolute Konstante $C > 0$ und $R(s, \chi)$ mit $|R(s, \chi)| \leq C\mathcal{L}$ und

$$-\frac{L'}{L}(s, \chi) = \sum_{\substack{\varrho \colon L(\varrho, \chi) = 0 \\ |\varrho - s| \leq 1}} \frac{1}{s - \varrho} + R(s, \chi). \tag{2}$$

Wir wählen nun $c_0 = 10^{-2}C$ sowie $c_1 = 10^{-2}c_0$ und nehmen an, $L(s,\chi)$ habe die zwei Nullstellen $\varrho_1 = \beta_1 + i\gamma_1$ sowie $\varrho_2 = \beta_2 + i\gamma_2$ mit $\beta_i > 1 - \frac{c_0}{\log q}$ sowie $|\gamma_i| < \frac{c_1}{\log q}$, wobei dabei die Möglichkeit eingeschlossen ist, dass $\varrho_1 = \varrho_2$ gilt und somit ϱ_1 eine mehrfache Nullstelle ist.
Wir wenden (2) mit $s = \sigma_0 = 1 + \frac{2c_0}{\log q}$ an und erhalten

$$-\Re\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi) = \frac{1}{\sigma_0 - \beta_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{\gamma_1^2}{(\sigma_0-\beta_1)^2}} + \frac{1}{\sigma_0 - \beta_2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\gamma_2^2}{(\sigma_0-\beta_2)^2}} + \Re(R(\sigma_0,\chi)) \geq \frac{3}{5}\cdot\frac{\log q}{c_0}. \tag{3}$$

Andererseits ist

$$-\Re\frac{L'}{L}(\sigma_0,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)n^{-\sigma_0} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma_0) \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{\log q}{c_0} + O(1). \tag{4}$$

Die Aussagen (3) und (4) stehen für $q \geq q_0$ im Widerspruch.
Wir nehmen ferner an, $L(s,\chi)$ habe eine nichtreelle Nullstelle ϱ_1 in $\mathcal{G}$. Dann ist wegen $\chi^2 = \chi_0$ auch $\varrho_1 \in \mathcal{G}$ im Widerspruch zu (1). $\square$

Definition 3.6.1. Es sei $q \in \mathbb{N}$, χ ein Dirichletcharakter modulo q und c_0 fest. Die einzige möglicherweise existierende einfache reelle Ausnahmenullstelle σ^* von $L(s,\chi)$, für die die Abschätzung $\sigma^* \leq 1 - \frac{c_0}{\log q}$ nicht gilt, heißt auch Siegel- Nullstelle von $L(s,\chi)$.

Bemerkung 3.6.1. Es wird vermutet, dass Siegel- Nullstellen nicht existieren. Man hat die wesentlich schärfere verallgemeinerte Riemannsche- Vermutung:
Ist $L(s,\chi) = 0$ mit $0 < \Re(\sigma) < 1$, so gilt $\Re(\sigma) = \frac{1}{2}$.
Ein berühmter Spezialfall ($q = 1$) ist die Riemannsche- Vermutung (Bernhard Riemann 1859):
Ist $\zeta(s) = 0$ mit $0 < \Re(\sigma) < 1$, so gilt $\Re(\sigma) = \frac{1}{2}$.
Die Riemannsche Vermutung ist zur Abschätzung

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(x^{1/2+\epsilon}\right)$$

für alle $\epsilon > 0$ äquivalent. Aus der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung folgt

$$\pi(x,q,a) = \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} + O\left(x^{1/2+\epsilon}\log^2 q\right)$$

für alle q, a mit $(a,q) = 1$.

Wir wollen nun im folgenden eine Abschätzung für den Mindestabstand der Siegel- Nullstelle σ^* von $L(s,\chi)$ zum Punkt 1 herleiten, dem Satz von Siegel. Darüber hinaus wird unter anderem folgen, dass es eine solche Nullstelle höchstens für einen Charakter χ mod q geben kann.
Als Vorbereitung zeigen wir

Satz 3.6.2. *Es seien $q_1, q_2 \geq 0$ und χ_1 bzw. χ_2 reelle primitive Charaktere modulo q_1 bzw. q_2 mit $\chi_1 \neq \chi_2$. Es sei $F(s) = \zeta(s)L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)L(s,\chi_1\chi_2)$. Dann gilt mit absoluten positiven Konstanten c_1, c_2, c_3 und für $1 - c_3 \leq \sigma < 1$*

$$F(\sigma) > \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{1-\sigma}(q_1q_2)^{c_2(1-\sigma)}$$

mit $\lambda = L(1,\chi_1)L(1,\chi_2)L(1,\chi_1\chi_2)$.

Beweis. Wir nehmen an, es sei $\chi_1\chi_2 = \chi_0$ mit dem Hauptcharakter $\chi_0 \bmod q_1q_2$. Daraus folgt $\chi_1(n) = \chi_2(n)$ für alle n mit $(n, q_1q_2) = 1$. Dann induzieren χ_1 und χ_2 denselben Dirichletcharakter modulo q_1q_2. Damit sind q_1 und q_2 beide Führer von $\chi_1\chi_2$, also gilt $q_1 = q_2$ und damit auch $\chi_1 = \chi_2$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Es folgt also $\chi_1\chi_2 \neq \chi_0$. Damit ist $L(s, \chi_1\chi_2)$ in $\sigma > 0$ holomorph und ebenso $F(s)$ bis auf einen einfachen Pol bei $s = 1$ mit Residuum λ. Die Funktion

$$g(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s-1} \tag{1}$$

ist somit in $\sigma > 0$ holomorph. Für $\sigma > 1$ gilt

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$$

mit $b_n \geq 0$. Dies wird wie die analoge Aussage für $\zeta(s) \cdot L(s, \chi_1)$ in Satz 3.4.14 bewiesen. Aus

$$F^{(m)}(2) = (-1)^m \cdot \sum_n b_n n^{-2} (\log n)^m$$

erhalten wir

$$F(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (2-s)^m \tag{2}$$

mit $a_m \geq 0$, $a_0 \geq 1$ und $|s-2| < 1$ sowie

$$g(s) = F(s) - \frac{\lambda}{s-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m - \lambda) \cdot (2-s)^m \tag{3}$$

mit $|s-2| < 1$. Da nach (1) die Funktion $g(s)$ in $\sigma > 0$ holomorph ist, gilt (3) auch in $|s-2| \leq \frac{3}{2}$. Weiter gilt für $|s-2| = \frac{3}{2}$

$$\zeta(s) = O(1) \quad \text{und} \quad \frac{1}{s-1} = O(1)$$

und nach Satz 3.4.12

$$L(s, \chi_1)L(s, \chi_2)L(s, \chi_1\chi_2) = O\left((q_1q_2)^{c_4}\right)$$

mit einer absoluten Konstanten $c_4 > 0$. Damit folgt

$$g(s) = O\left(q_1q_2\right)^{c_4}) \tag{4}$$

für $|s-2| = \frac{3}{2}$ und auch für $|s-2| \leq \frac{3}{2}$ nach dem Maximumprinzip. Aus (2), (3) und (4) folgt mittels der Cauchyschen Integralformel

$$|a_m - \lambda| \leq c_5 (q_1q_2)^{c_4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^m \tag{5}$$

mit $m = 0, 1, 2, \ldots$. Wir wählen nun $c_6 > 0$ so, dass $2 - (1 - c_6) = 1 + c_6 < \frac{3}{2}$ ist und finden für $1 - c_6 \leq \sigma < 1$ wegen (2)

$$\begin{aligned} F(\sigma) &= \frac{\lambda}{\sigma - 1} = \sum_{0 \leq m < M} (a_m - \lambda) \cdot (2-\sigma)^m + \sum_{m \geq M} (a_m - \lambda) \cdot (2-\sigma)^m \\ &\geq 1 - \lambda \cdot \frac{(2-\sigma)^M - 1}{1 - \sigma} - c_7 (q_1q_2)^{c_4} \cdot \frac{\alpha^M}{1-\alpha} \end{aligned}$$

mit $\alpha = \frac{2}{3} \cdot (1 + c_6) < 1$. Wir wählen M so groß, dass das letzte Glied kleiner $\frac{1}{2}$ für alle $q_1 \geq 2$ und alle $q_2 \geq 2$ wird. Dies kann etwa mit $M = [c_8 \log(q_1 q_2)]$ erreicht werden, wobei $c_8 > 0$ eine absolute Konstante ist. Weiter gilt dann im Bereich $1 - c_6 \leq \sigma < 1$

$$(2-\sigma)^M = \exp\left(M \cdot \log(2-\sigma)\right) < \exp\left(c_8 \log(q_1 q_2) \cdot c_9 (1-\sigma)\right).$$

Hieraus folgt mit $c_3 = c_6$ und $c_2 = c_8 c_9$ die Behauptung. □

Satz 3.6.3. *Es seien $q \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter modulo q. Für $\epsilon > 0$ gibt es $q_0(\epsilon)$, so dass für $q > q_0(\epsilon)$ die Aussage $L(\sigma, \chi) \neq 0$ für $\sigma > 1 - q^{-\epsilon}$ gilt.*

Beweis. Ist χ ein Dirichletcharakter modulo q mit Führer $q^*|q$, so gibt es einen primitiven Charakter χ^* mod q^* mit $\chi = \chi^* \chi_0$, wobei χ_0 der Hauptcharakter modulo q ist. Nach Satz 3.4.5

$$L(s, \chi) = L(s, \chi^*) \cdot \prod_{p|q} (1 - \chi^*(p) p^{-s}).$$

Das endliche Produkt

$$\prod_{p|q} (1 - \chi^*(p) p^{-s})$$

hat nur für $\sigma = 0$ Nullstellen. Daher haben $L(s, \chi)$ und $L(s, \chi^*)$ in der Halbebene $\sigma > 0$ dieselben Nullstellen. Wegen $1 - (q^*)^{-\epsilon} < 1 - q^{-\epsilon}$ genügt es daher, die Behauptung für primitive Charaktere zu beweisen. Ferner kann nach Satz 3.4.12 (i) angenommen werden, dass χ reell ist.
Es seien χ_1 mod q_1 und χ_2 mod q_2 primitive reelle Charaktere, und F sei wie in Satz 3.6.3 definiert. Für $1 - c_1 \leq \sigma_1 < 1$ sei $L(\sigma_1, \chi_1) = 0$. Nach Satz 3.6.2 folgt

$$\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{1 - \sigma_1} \cdot (q_1 q_2)^{c_2(1-\sigma_1)} < 0.$$

Mittels Abelscher partieller Summation folgt leicht

$$L(1, \chi_1) \cdot L(1, \chi_1 \chi_2) = O(\log^2(q_1 q_2)) < (q_1 q_2)^{\epsilon}$$

für $q_1, q_2 > q(\epsilon)$ bei beliebigem $\epsilon > 0$.
Aufgrund der Gültigkeit von $L(1, \chi) > 0$ für $\chi = \chi_1$ und $\chi = \chi_1 \chi_2$ nach Satz 3.4.15 folgt

$$L(1, \chi_2) > \frac{1}{2} \cdot (1 - \sigma_1) \cdot (q_1 q_2)^{-c_3(1-\sigma_1) - \epsilon} \tag{1}$$

für $q_1 q_2 > q(\epsilon)$, was wir im folgenden voraussetzen. Wir nehmen an, es sei $1 - \sigma_1 \leq c_4 \epsilon$, wobei c_4 später noch genauer bestimmt wird. Dann folgt aus (1)

$$L(1, \chi_2) > \frac{1}{2} \cdot (1 - \sigma_1) \cdot (q_1 q_2)^{-\epsilon(1 + c_2 c_3)}.$$

Setzen wir jetzt $c_4 = c_2^{-1}$ und wählen wir q_2 groß, $q_2 > q_2'(\epsilon, q_1)$, so dass

$$\frac{1}{2} \cdot (1 - \sigma_1) \cdot q_1^{-2\epsilon} > q_2^{-\epsilon}$$

wird, so folgt aus (1)

$$L(1, \chi_2) > q_2^{-3\epsilon} \tag{2}$$

für $q_1 q_2 > q(\epsilon)$ und $q_2 > q_2'(\epsilon, q_1)$.
Wenn es also ein χ_1 mod q_1 mit $L(\sigma_1, \chi_1) = 0$ für ein σ_1 mit $1 - c_5 \epsilon \leq \sigma_1 < 1$ gibt, so folgt aus (2)

$$L(1, \chi) > q^{-3\epsilon} \tag{3}$$

für $q > \max\{q_2'(\epsilon, q_1), q(\epsilon)/q_1\} = q'(\epsilon)$.
Für $1 - q^{-4\epsilon} \leq \sigma \leq 1$ und $q > q''(\epsilon)$ ergibt sich nach dem Mittelwertsatz

$$L(\sigma, \chi) = L(1, \chi) - (1 - \sigma) \cdot L'(\overline{\sigma}, \chi) \tag{4}$$

mit $\sigma \leq \overline{\sigma} \leq 1$. Mit Abelscher partieller Summation zeigt man, dass für $1 - q^{-4\epsilon} \leq \overline{\sigma} \leq 1$

$$L'(\overline{\sigma}, \chi) = O(\log^2(2q)) \tag{5}$$

gilt.
Aus (4) und (5) folgt

$$|L(\sigma, \chi)| > q^{-3\epsilon} + O(q^{-4\epsilon} \log^2 q) > 0$$

für $1 - q^{-4\epsilon} \leq \sigma \leq 1$ und für hinreichend große q.
Damit ist die Behauptung mit 4ϵ statt ϵ beweisen, wenn es im Bereich $1 - c_4\epsilon \leq \sigma \leq 1$ eine Nullstelle einer beliebigen L- Funktion bzgl. eines beliebigen Moduls q_1 gibt. Wenn alle $L(s, \chi) \neq 0$ sind, so folgt die Behauptung wegen $c_4\epsilon > q^{-\epsilon}$ für $q \geq q'''(\epsilon)$. □

Satz 3.6.4. *(Primzahlsatz von Page- Siegel- Walfisz)*
Es sei $A > 0$ beliebig groß, $q \in \mathbb{N}$ und $(a, q) = 1$ sowie $1 \leq q \leq (\log x)^A$. Dann gibt es eine absolute Konstante $c > 0$ mit

(i) $\psi(x, \chi) = O_A\left(x \cdot \exp(-c(\log x)^{1/2})\right)$

(ii) $\psi(x, q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O_A\left(x \cdot \exp(-c(\log x)^{1/2})\right)$

(iii) $\pi(x, q, a) = \frac{\mathrm{li}(x)}{\varphi(q)} + O_A\left(x \cdot \exp(-c(\log x)^{1/2})\right)$.

Beweis. (i) Im folgenden sei χ stets ein Dirichletcharakter modulo q und $q \leq (\log x)^A$. Wir können O.B.d.A. auch $x = m + \frac{1}{2}$ mit $m \in \mathbb{N}$ annehmen. Wir setzen $c = 1 + \frac{1}{\log x}$ und $T = \exp((\log x)^{1/2})$. Nach Satz 3.3.3 haben wir

$$\psi(x, \chi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \left(-\frac{L'}{L}(s, \chi)\right) \cdot \frac{x^s}{s}\, ds + O\left(x \cdot \exp\left(-(\log x)^{1/2} \log^2 x\right)\right). \tag{1}$$

Nach Satz 3.4.12 (i) gibt es eine absolute Konstante $c_0 > 0$, so dass $L(s, \chi) \neq 0$ und

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = O((\log x)^2) \tag{2}$$

für $\sigma \geq 1 - \frac{c_0}{\log x}$ und $1 \leq |t| \leq T$. Nach Satz 3.6.1 gibt es eine absolute Konstante $c_1 > 0$, so dass im Gebiet $\sigma > 1 - \frac{c_1}{\log q}$ und $|t| < 1$ die Funktion $L(s, \chi)$ höchstens eine reelle Nullstelle besitzt. Für diese Nullstelle $\sigma(\chi)$ gilt nach Satz 3.6.3

$$\sigma(\chi) \leq 1 - q^{-1/(2A)}, \tag{3}$$

falls $q \geq q_0(A)$ gilt. Wir ergänzen den Integrationsweg $[c - iT, c + iT]$ zur geschlossenen Kurve

$$\mathcal{C} = [c - iT, c + iT] \cup [c + iT, a + iT] \cup [a + iT, a - iT] \cup [a - iT, c - iT]$$

mit $a = 1 - \frac{c_2}{\log x}$ mit $c_2 = \min\{c_0, c_1\}$. Aus Satz 3.4.11 folgt, dass auch für $\sigma = a$ und $|t| \leq 1$ die Abschätzung

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) = O((\log x)^2) \tag{4}$$

gilt. Aus (1) bis (4) erhalten wir mit $|\vartheta| \le 2$

$$\begin{aligned}\psi(x,\chi) &= \mathrm{Res}_{s=1}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\cdot\frac{x^s}{s}\right) + \mathrm{Res}_{s=\sigma(\chi)}\left(-\frac{L'}{L}(s,\chi)\cdot\frac{x^s}{s}\right) + O_A(x\cdot\exp(-c(\log x)^{1/2}))\\ &= E(q,\chi)\cdot x - \vartheta x\cdot\exp(-(\log x)^{1/2})) + O_A(x\cdot\exp(-c(\log x)^{1/2})),\end{aligned}$$

wobei der von $\sigma(\chi)$ herrürende Term nur dann aufftritt, falls $\sigma(\chi)$ existiert. Damit ist (i) gezeigt.

(ii) Dies folgt aus (i) mittels der Orthogonalitätsrelation.

(iii) Dies folgt aus (ii) durch Abelsche partielle Summation.

□

3.7 Das große Sieb

Satz 3.7.1. *Es sei f auf $[\alpha-\delta/2,\alpha+\delta/2]$ stetig differenzierbar. Dann haben wir*

$$|f(\alpha)| \le \int_{\alpha-\delta/2}^{\alpha+\delta/2} \frac{1}{\delta}\cdot|f(u)| + \frac{1}{2}\cdot|f'(u)|\,du.$$

Beweis. Es sei g auf $[0,1]$ stetig differenzierbar. Dann ist

$$\int_0^x u\cdot g'(u)\,du = [u\cdot g(u)]_0^x - \int_0^x g(u)\,du = x\cdot g(x) - \int_0^x g(u)\,du \tag{1}$$

sowie

$$\int_x^1 (u-1)\cdot g'(u)\,du = [u\cdot g(u)]_x^1 - \int_x^1 g(u)\,du + g(x) - g(1) = -x\cdot g(x) - \int_x^1 g(u)\,du + g(x). \tag{2}$$

Addition von (1) und (2) ergibt

$$g(x) = \int_0^1 g(u)\,du + \int_0^x u\cdot g'(u)\,du + \int_x^1 (u-1)\cdot g'(u)\,du.$$

Damit gilt

$$g\left(\frac{1}{2}\right) \le \int_0^1 |g(u)| + \frac{1}{2}\cdot|g'(u)|\,du. \tag{3}$$

Wir wenden nun (3) mit $g(x) = f(\alpha-\delta/2+\delta x)$ an und erhalten die Behauptung. □

Definition 3.7.1. Im folgenden seien $a_n \in \mathbb{C}$, $M+1 \le n \le M+N$ und

$$S(\alpha) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(n\alpha).$$

Satz 3.7.2. *(Das Große Sieb)*
Es sei $S(\alpha)$ wie in Definition 3.5.1, $\delta > 0$ und $\alpha_1,\ldots,\alpha_R \in [0,1]$ mit $||\alpha_r - \alpha_s|| \ge \delta$ für $r \ne s$. Dann gilt

$$\sum_{r=1}^{R} |S(\alpha_r)|^2 \le (N+3\delta^{-1})\cdot\sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2.$$

Beweis. Voraussetzung und Folgerung von Satz 3.7.2 bleiben unverändert, wenn die Koeffizienten a_n durch $a_n \cdot e(Ln)$ mit beliebigem $L \in \mathbb{Z}$ ersetzt werden. Daher können wir O.B.d.A.

$$S(\alpha) = \sum_{n=-k}^{k} a_n \cdot e(n\alpha)$$

mit $k = [\frac{N+1}{2}]$ annehmen.
Wir wenden Satz 3.7.1 mit $f(\alpha) = S(\alpha)^2$ an und erhalten

$$|S(\alpha_r)|^2 \leq \int_{\alpha_r-\delta/2}^{\alpha_r+\delta/2} \frac{1}{\delta} \cdot |S(u)|^2 + \frac{1}{2} \cdot |S(u)| \cdot |S'(u)| \, du,$$

wobei die Grenzen $\alpha_r - \delta/2$ bzw. $\alpha_r + \delta/2$ modulo 1 zu verstehen sind.
Wegen $||\alpha_r - \alpha_s|| \geq \delta$ für $r \neq s$ sind die Intervalle $[\alpha_r - \delta/2, \alpha_r + \delta/2]$ paarweise disjunkt, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{R} |S(\alpha_r)|^2 &\leq \int_0^1 \delta^{-1} \cdot |S(u)|^2 + |S(u)| \cdot |S'(u)| \, du \\ &\leq \delta^{-1} \cdot \int_0^1 |S(u)|^2 \, du + \left(\int_0^1 |S(u)|^2 \, du \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 |S'(u)|^2 \, du \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Parsevals Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} \int_0^1 |S(u)|^2 \, du &= \sum_{n=-k}^{k} |a_n|^2 \quad \text{sowie} \\ \int_0^1 |S'(u)|^2 \, du &= \sum_{n=-k}^{k} (2\pi n)^2 \cdot |a_n|^2 \leq (2\pi k)^2 \cdot \sum_{n=-k}^{k} |a_n|^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 3.7.3. *Es sei $S(\alpha)$ wie in Definition 3.5.1 und $Q \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \left| S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 \leq (N + 3Q^2) \cdot \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2.$$

Beweis. Wir wenden Satz 3.7.2 an, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ die der Größe nach geordneten Fareybrüche $\frac{a}{q}$ mit $(a, q) = 1$ sind. Es ist dann

$$||\alpha_r - \alpha_s|| = \left| \frac{a_1}{q_1} - \frac{a_2}{q_2} \right| = \left| \frac{a_1 q_2 - a_2 q_1}{q_1 q_2} \right| \geq \frac{1}{q_1 q_2} \geq \frac{1}{Q^2}.$$

□

Satz 3.7.4. *(Das Große Sieb für Charaktersummen)*
Es sei $a_n \in \mathbb{C}$, χ ein Dirichletcharakter modulo q und $Q \geq 1$. Weiter sei

$$T(\chi) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n).$$

Dann ist

$$\sum_{q\le Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}|T(\chi)|^2 \le (N+3Q^2)\cdot\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2,$$

wobei $\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}$ *die Summe über alle primitiven Charaktere modulo* q *bedeute.*

Beweis. Um Satz 3.7.3 anwenden zu können, ersetzen wir daher nun die multiplikativen Charaktere $\chi\colon (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z},\cdot)^* \to \mathbb{C}$ durch die additiven Charaktere $e_{a,q}\colon (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z},+)\to\mathbb{C}$. Nach Satz 2.2.4 haben wir für primitive Dirichletcharaktere $\chi \bmod q$ mit der Gaußschen Summe $\tau(\overline{\chi})$

$$\chi(n)=\tau(\overline{\chi})^{-1}\cdot\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi}(a)\cdot e\left(\frac{an}{q}\right)$$

mit $|\tau(\overline{\chi})|=q^{1/2}$. Wir erhalten

$$T(\chi)=\frac{1}{\tau(\overline{\chi})}\cdot\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi(a)}\cdot S\left(\frac{a}{q}\right)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}|T(\chi)|^2 &= \frac{1}{q}\cdot\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}\left|\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi(a)}\cdot S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 \le \frac{1}{q}\cdot\sum_{\chi \bmod q}\left|\sum_{a=1}^{q}\overline{\chi(a)}\cdot S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2\\
&= \frac{1}{q}\cdot\sum_{\chi \bmod q}\left(\sum_{a_1=1}^{q}\overline{\chi(a_1)}\cdot S\left(\frac{a_1}{q}\right)\right)\cdot\left(\sum_{a_2=1}^{q}\chi(a_2)\cdot S\left(-\frac{a_2}{q}\right)\right)\\
&= \frac{1}{q}\cdot\sum_{a_1,a_2=1}^{q}S\left(\frac{a_1}{q}\right)\cdot S\left(-\frac{a_2}{q}\right)\sum_{\chi \bmod q}\overline{\chi(a_1)}\cdot\chi(a_2) = \frac{\varphi(q)}{q}\cdot\sum_{a=1}^{q}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sum_{q\le Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}|T(\chi)|^2 \le \sum_{q\le Q}\sum_{\substack{a \bmod q\\(a,q)=1}}\left|S\left(\frac{a}{q}\right)\right|^2 \le (N+3Q^2)\cdot\sum_{n=M+1}^{M+N}|a_n|^2$$

nach Satz 3.7.3. □

Satz 3.7.5. *Es seien* $Q\ge 1$, $a_m, b_n\in\mathbb{C}$ *und* χ *ein Dirichletcharakter modulo* q. *Dann gilt*

$$\begin{aligned}
&\sum_{q\le Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}\max\left|\sum_{1\le m\le M}\sum_{1\le n\le N}a_m b_n\chi(mn)\right|\\
= \ & O\left((M+Q^2)^{1/2}(N+Q^2)^{1/2}\left(\sum_{1\le m\le M}|a_m|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{1\le n\le N}|b_n|^2\right)^{1/2}\log(2MN)\right)
\end{aligned}$$

Beweis. Es sei $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta>0$, $c>0$, $T\ge 1$, $s=\sigma+it$, $y_1=e^{\alpha+\beta}$ und $y_2=e^{\alpha-\beta}$. Nach Satz 3.4.2 (Perronsche Formel) haben wir

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{y_1^s-y_2^s}{s}\,ds=\begin{cases}1+O\left(T^{-1}(\beta-|\alpha|)^{-1}\right), & \text{falls } |\alpha|\le\beta\\ O\left(T^{-1}(\beta-|\alpha|)^{-1}\right) & \text{falls } |\alpha|>\beta.\end{cases} \tag{1}$$

Da der Integrand auch für $s = 0$ stetig ist, gilt (1) auch für $c = 0$, und wir erhalten

$$\int_{-T}^{T} e^{it\alpha} \cdot \frac{\sin(t\beta)}{t}\, dt = \begin{cases} \pi + O\left(T^{-1}(\beta - |\alpha|)^{-1}\right), & \text{falls } |\alpha| \le \beta \\ O\left(T^{-1}(\beta - |\alpha|)^{-1}\right) & \text{falls } |\alpha| > \beta. \end{cases}$$

Wir setzen $\beta = \log u$ und erhalten

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} a_m b_n \chi(mn) = \int_{-T}^{T} A(t,\chi) B(t,\chi) \frac{\sin(t \log u)}{\pi t}\, dt + O\left(T^{-1} \sum_{m,n} |a_m b_n| \left|\log \frac{mn}{u}\right|^{-1} \right) \tag{2}$$

mit

$$A(t,\chi) = \sum_{m=1}^{M} a_m \chi(m) m^{-it} \quad \text{bzw.} \quad B(t,\chi) = \sum_{n=1}^{N} b_n \chi(n) n^{-it}.$$

Wir nehmen O.B.d.A. $u = k + \frac{1}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $0 \le k \le MN$ an. Dann ist

$$\left|\log \frac{mn}{u}\right| \ge \frac{c_0}{u} \ge \frac{c_0}{MN}$$

mit absoluten Konstanten $c_0, c_1 > 0$ und

$$\sin(t \log u) = O(\min\{1, |t| \log(2MN)\}).$$

Damit ist die rechte Seite in (2)

$$O\left(\int_{-T}^{T} |A(t,\chi)B(t,\chi)| \min\left\{ \frac{1}{|t|}, \log(2MN) \right\} dt + \frac{MN}{T} \sum_{m \le M} \sum_{n \le N} |a_m b_n| \right) \tag{3}$$

Nach der Cauchy- Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\left| \sum_{q \le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} A(t,\chi)B(t,\chi) \right| \le \left(\sum_{q \le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} |A(t,\chi)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{q \le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} |B(t,\chi)|^2 \right)^{1/2}$$

und nach Satz 3.7.4

$$\begin{aligned} \sum_{q \le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} |A(t,\chi)|^2 &\le (M + 3Q^2) \sum_{1 \le m \le M} |a_m|^2 \quad \text{und} \\ \sum_{q \le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} |B(t,\chi)|^2 &\le (N + 3Q^2) \sum_{1 \le n \le N} |b_n|^2. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} &\int_{-T}^{T} \sum_{q \le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q} A(t,\chi)B(t,\chi) \min\left\{ \frac{1}{|t|}, \log(2MN) \right\} dt \\ \ll\ &(M + Q^2)^{1/2} (N + Q^2)^{1/2} \left(\sum_{m \le M} |a_m|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n \le N} |b_n|^2 \right)^{1/2} \int_{-T}^{T} \min\left\{ \frac{1}{|t|}, \log(2MN) \right\} dt. \end{aligned}$$

Daraus und aus (2) sowie (3) folgt die Behauptung von Satz 3.7.5. □

3.8 Satz von Bombieri

Satz 3.8.1. *(Satz von Bombieri)*
Es sei $A > 0$ fest. Dann haben wir für $x^{1/2}(\log x)^{-A} \le Q \le x^{1/2}$

$$\sum_{q \le Q} \max_{a\colon (a,q)=1} \max_{y \le x} \left| \psi(y,q,a) - \frac{y}{\varphi(q)} \right| \le x^{1/2} Q (\log x)^5.$$

Bemerkung 3.8.1. Aus Satz 3.8.1 folgt, dass für die meisten $y \le x^{1/2}(\log x)^{-A}$ die Größe

$$\max_{a\colon (a,q)=1} \max_{y \le x} \left| \psi(y,q,a) - \frac{y}{\varphi(q)} \right|$$

wesentlich kleiner als $\frac{x}{\varphi(q)}$ ist.
Diese Tatsache folgt aus der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung für alle $q \le x^{1/2}(\log x)^{-A}$.

Beweis. (Beweis von Satz 3.8.1)
Wir wollen die Sätze des vorigen Abschnitts anwenden. Dazu müssen wir das Problem auf eine Aussage über primitive Charaktere reduzieren. Wir zeigen zunächst, dass Satz 3.8.1 aus folgender Aussage folgt:

$$\sum_{q \le Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q}{}^{*} \max_{y \le x} |\psi(y,\chi)| = O\left((x + x^{5/6}Q + x^{1/2}Q^2)(\log(Qx)^4)\right). \tag{1}$$

Wir haben

$$\psi(y,q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi(a)} \psi(y,\chi).$$

Wir setzen zum einen

$$\psi'(y,\chi) = \begin{cases} \psi(y,\chi), & \text{wenn } \chi \ne \chi_0 \\ \psi(y,\chi) - y, & \text{wenn } \chi = \chi_0 \end{cases}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} E(y,q,a) &= \psi(y,q,a) - \frac{y}{\varphi(q)} \\ E(y,q) &= \max E(y,q,a) \\ E^*(x,q) &= \max_{y \le x} E(y,q). \end{aligned}$$

Dann ist

$$E(y,q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi} \overline{\chi(a)} \cdot \psi'(y,\chi) \tag{2}$$

und deshalb

$$|E(y,q,a)| \le \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi} |\psi'(y,\chi)|.$$

Der Charakter $\chi \bmod q$ werde vom primitiven Charakter $\chi_1 \bmod q_1$ induziert. Dann ist

$$\begin{aligned} \psi'(y,\chi_1) - \psi'(y,\chi) &= \sum_{\substack{p^k \le y \\ p \mid q}} \chi_1(p^k) \log p = O\left(\sum_{p \mid q} \left[\frac{\log y}{\log p} \right] \log p \right) \\ &= O\left((\log y) \sum_{p \mid q} \log p \right) = O(\log(qy)^2). \end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$E(y,q,a) = O(\log(qy)^2) + O\left(\frac{1}{\varphi(q)} \cdot \sum_{\chi} |\psi'(y,\chi_1)|\right) \tag{3}$$

Wir sammeln alle Beiträge, die von einem festen primitiven Charalter stammen. Ein primitiver Dirichletcharakter $\chi \bmod q$ induziert Charaktere nach Moduln, die Vielfache von q sind. Deshalb ist die linke Seite von Satz 3.8.1

$$O(Q\log(Qx)^2) + \sum_{q\leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^{*} \max_{y\leq x} |\psi(y,\chi)| \left| \sum_{k\leq \frac{q}{q}} \frac{1}{\varphi(kq)} \right| \tag{4}$$

Es ist $\varphi(qk) \geq \varphi(k)\varphi(q)$ und

$$\sum_{k\leq z} \frac{1}{\varphi(k)} \leq \prod_{p\leq z} \left(1 + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p(p-1)} + \dots\right) = \prod_{p\leq z} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right) O(\log z).$$

Deshalb ist der zweite Term in (4)

$$O\left(\log x \sum_{q\leq Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q}^{*} \max_{y\leq x} |\psi'(y,\chi)|\right),$$

und es genügt zu zeigen, dass

$$\sum_{q\leq Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q}^{*} \max_{y\leq x} |\psi'(y,\chi)| \ll x^{1/2} Q (\log x)^4 \tag{5}$$

für $x^{1/2}(\log x)^{-A} \leq Q \leq x^{1/2}$ gilt. Aus (1) erhalten wir

$$\sum_{U<q\leq 2U} \frac{1}{\varphi} \sum_{\chi \bmod q}^{*} \max_{y\leq x} |\psi'(y,\chi)| \ll \left(\frac{x}{U} + x^{5/6} + x^{1/2}U\right) (\log Ux)^4.$$

Wir setzen $U = 2^k$, summieren über k für $(\log x)^A \leq 2^k \leq Q$ und erhalten

$$\sum_{(\log x)^A<q\leq Q} \frac{1}{\varphi} \sum_{\chi \bmod q}^{*} \max_{y\leq x} |\psi(y,\chi)| \ll \left(x(\log x)^{-A} + x^{5/6}\log Q + x^{1/2}Q\right) (\log Qx)^4. \tag{6}$$

Nach Satz 3.5.4 (i) gilt auch

$$\sum_{q\leq(\log x)^A} \frac{1}{\varphi} \sum_{\chi \bmod q}^{*} \max_{y\leq x} |\psi(y,\chi)| \ll \left(x(\log x)^{-A} + x^{5/6}\log Q + x^{1/2}Q\right) (\log Qx)^4. \tag{7}$$

Somit zeigen (5), (6) und (7), dass Satz 3.8.1 aus (1) folgt.

Im folgenden wollen wir noch (1) beweisen.
Es ist (Übungsaufgabe)

$$\psi(y,\chi) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \tag{8}$$

mit

$$S_1 = \sum_{n\leq U} \Lambda(n)\chi(n), \tag{9}$$

$$S_2 = -\sum_{t\le UV}\left(\sum_{\substack{t=md\\ m\le U\\ d\le V}}\mu(d)\Lambda(m)\right)\sum_{r\le \frac{y}{t}}\chi(rt), \tag{10}$$

$$S_3 = \sum_{n\le y}\left(\sum_{\substack{hd=n\\ d\le V}}\mu(d)\log h\right)\chi(n), \tag{11}$$

$$S_4 = \sum_{U<m\le \frac{y}{V}}\Lambda(m)\sum_{V<k\le \frac{y}{m}}\left(\sum_{\substack{d|k\\ d\le V}}\mu(d)\right)\chi(mk). \tag{12}$$

Zum Beweis von (1) schätzen wir nun die Summen

$$\Sigma_j := \sum_{q\le Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}\max_{y\le x}|S_j|$$

für $1\le j\le 4$ ab.

- $j=1$:
  Aus elementaren Primzahlabschätzungen folgt $S_1 = O(U)$ und damit
  $$\Sigma_1 = O(UQ^2). \tag{13}$$

- $j=2$:
  Es ist $S_2 = S_2' + S_2''$ mit
  $$\begin{aligned} S_2' &= -\sum_{t\le U}\left(\sum_{\substack{t=md\\ m\le U\\ d\le V}}\mu(d)\Lambda(m)\right)\sum_{r\le \frac{y}{t}}\chi(rt) \quad \text{und}\\ S_2'' &= -\sum_{U<t\le UV}\left(\sum_{\substack{t=md\\ m\le U\\ d\le V}}\mu(d)\Lambda(m)\right)\sum_{r\le \frac{y}{t}}\chi(rt). \end{aligned}$$
  Zur Abschätzung von S_2' wenden wir die Ungleichung von Pólya- Vinogradoff an (Übungsaufgabe): Ist $\chi\ne\chi_0$ ein Dirichletcharakter modulo q, so ist
  $$\sum_{n=M+1}^{M+N}\chi(n) = O(q^{1/2}\log q). \tag{14}$$
  Weiter beachten wir, dass
  $$\sum_{m|t}\Lambda(m) = \log t$$
  gilt. Wir erhalten für $q>1$
  $$S_2' \ll (\log U)\sum_{t\le U}\left|\sum_{r\le \frac{y}{t}} chi(r)\right| = O(q^{1/2}U\log^2(qU)). \tag{15}$$

Für $q=1$ ergibt sich die triviale Abschätzung

$$S_2' = O(x\log^2(xU)). \tag{16}$$

Zur Abschätzung von S_2'' wenden wir Satz 3.7.5 an und erhalten

$$\begin{aligned}
&\sum_{q\le Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}\max_{y\le x}\left|\sum_{\substack{U<t\le UV\\ M<t\le 2M}}\left(\sum_{\substack{t=md\\ m\le U, d\le V}}\mu(d)\Lambda(m)\right)\left(\sum_{r\le \frac{y}{t}}1\right)\chi(rt)\right| \\
\ll\ & (M+Q^2)^{1/2}\left(\frac{x}{M}+Q^2\right)^{1/2}\left(\sum_{M<t\le 2M}\log^2 t\right)^{1/2}\left(\sum_{r\le\frac{y}{t}}1\right)^{1/2} \\
\ll\ & (Q^2x^{1/2}+QxM^{-1/2}+QU^{1/2}V^{1/2}+x)(\log x).
\end{aligned}$$

Wir setzen $M=2^k$, summieren über k und erhalten

$$\sum_{q\le Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}\max_{y\le x}|S_2''| \ll (Q^2x^{1/2}+QxU^{-1/2}+QU^{1/2}V^{1/2}+x)(\log x)^2. \tag{17}$$

Die Aussagen (15), (16) und (17) ergeben schließlich

$$\Sigma_2 \ll (Q^{5/2}U+QxU^{-1/2}+Qx^{1/2}U^{1/2}V^{1/2}+x)(\log x)^2. \tag{18}$$

- $j=3$:
  Es ist

$$S_3=\sum_{d\le V}\mu(d)\chi(d)\sum_{h\le\frac{y}{d}}(\log h)\chi(h).$$

Durch partielle Summation ergibt sich

$$\sum_{h\le\frac{y}{d}}(\log h)\chi(h)=\left(\sum_{h\le\frac{y}{d}}\chi(d)\right)\log\frac{y}{d}-\int_{1/2}^{\frac{y}{d}}\left(\sum_{h\le w}\chi(h)\right)\frac{dw}{w}=O(q^{1/2}\log(qy))$$

mit $q>1$ nach (14). Für $q=1$ schätzen wir trivial ab. Wir erhalten

$$\Sigma_3 \ll (Q^{5/2}V+x)\log^2(Vx). \tag{19}$$

- $j=4$:
  Wir wenden wieder Satz 3.7.5 an und erhalten

$$\begin{aligned}
&\sum_{q\le Q}\frac{q}{\varphi(q)}\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod q}\max_{y\le x}\left|\sum_{\substack{U<m\le\frac{y}{V}\\ M<m\le 2M}}\sum_{V<k\le\frac{y}{m}}\left(\sum_{d|k}\mu(d)\right)\chi(mk)\right| \\
\ll\ & (Q^2+M)^{1/2}\left(Q^2+\frac{x}{M}\right)^{1/2}\left(\sum_{M<m\le 2M}\Lambda(m)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k\le\frac{x}{M}}\tau(k)^2\right)^{1/2}\log x.
\end{aligned}$$

Wir verwenden die Abschätzung

$$\sum_{k\le u}\tau(k)^2=O(u\log^3 u),$$

setzen $M=2^l$, summieren über l und erhalten

$$\Sigma_4 \ll (Q^2x^{1/2}+QxU^{-1/2}+QxV^{-1/2}+x)(\log x)^4. \tag{20}$$

Wir fassen nun die Abschätzungen der Σ_j für $1 \leq j \leq 4$ zusammen:
Wir wählen $V = U$ und

$$U = \begin{cases} x^{2/3}Q^{-1}, & \text{falls } x^{1/3} le Q \leq x^{1/2} \\ x^{1/3}, & \text{falls } U = x^{1/3}. \end{cases}$$

Wir erhalten (1) und damit den Beweis von Satz 3.8.1.

$\square$