Übungen zu Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 21. Januar 2016, vor den Übungen

1. Bestimme alle Stellen des Definitionsbereiches, an denen f_i für $1 \leq i \leq 3$ monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

   (a) $f_1(x) = \dfrac{e^x}{x}$

   (b) $f_2(x) = x \cdot \ln x + 2$

   (c) $f_3(x) = \sin x + \cos x$ (2+2+2 Punkte)

2. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 \cdot e^x & \text{für} \quad x \leq 1 \\ x \cdot \log x + a \cdot (x-1) - x + b & \text{für} \quad x > 1. \end{cases}$$

   Welche Bedingung müssen a und b erfüllen, damit f differenzierbar ist? (3 Punkte)

3. Zeige die Aussage $e^x > 1 + x$

   (a) für $x > 0$

   (b) für $x \leq -1$ (2+1 Punkte)

4. Mit Hilfe der Expontialfunktion und des Logarithmus lassen sich auch exotische Ausdrücke, wie

$$e^{\pi} := \exp(\pi) \quad \text{bzw.} \quad \pi^e := \exp(e \ln \pi)$$

   definieren. Welche dieser Zahlen ist die größere von beiden?
   Beantworte diese Frage mit Hilfe analytischer Argumente und der Aussage $\pi > e$. (2 Punkte)

5. Bestimme die Koordinaten aller lokaler Extrema folgender Funktionen und gib ab, ob es sich jeweils um ein lokales Maximum oder Minimum handelt:

   (a) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1$

   (b) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

   (c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3}$ (2+2+2 Punkte)

6. Bestimme im Falle der Existenz das globale Maximum und Minimum folgender Funktionen:

   (a) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 16x + 1280$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (2+2 Punkte)