Übungen zu Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 26. November 2015, vor den Übungen

1. Überprüfe, ob die gegebenen Folgen monoton bzw. streng monoton sind:

   (a) $(a_n)_{n=4}^{\infty}$ mit $a_n = \binom{n}{4}$

   (b) $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $b_n = \dfrac{1}{1+n^2}$

   (c) $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $c_n = n^4 - 8n^3 + 24n^2 - 32n + 16$ (1+1+1 Punkte)

2. Überprüfe, ob die gegebenen Folgen beschränkt sind:

   (a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n = (-1)^n$

   (b) $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $b_n = \dfrac{1}{1+n^2}$

   (c) $(c_n)_{n=3}^{\infty}$ mit $c_n = \dfrac{1}{n^4 - 8n^3 + 24n^2 - 32n + 16}$ (1+1+1 Punkte)

3. Wir kennen bereits eine Möglichkeit, das Bildungsgesetz einer Folge (a_n) anzugeben, nämlich durch eine Funktionsvorschrift, etwa über $a_n = \frac{1}{n}$. Eine weitere Möglichkeit ist die Angabe über eine Rekursionvorschrift. Dazu gibt man einen oder mehrere Anfangswerte sowie eine Vorschrift an, wie ein Folgenglied aus den vorhergehenden Gliedern berechnet werden kann.
   Wir betrachten eine Folge, die durch zwei Anfangsglieder $u_1 = 1$ und $u_2 = 1$ sowie durch eine Rekursionsvorschrift $u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$ für $k \geq 2$ erklärt ist.

   (a) Bestimme die ersten zwölf Folgenglieder dieser Folge.

   (b) Zeige folgende Aussage:
   $$\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = u_n \cdot u_{n+1}.$$

   (c) Zeige die Aussage $u_{k+l} = u_{k-1} \cdot u_l + u_k \cdot u_{l+1}$.

   (d) Zeige, dass benachbarte Folgenglieder teilerfremd sind. (1+2+3+3 Punkte)

4. Vereinfache die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich:

   (a) $\sqrt[5]{\sqrt[2]{32}}$

   (b) $12b^2c \cdot \sqrt{\dfrac{5a}{24b^2c}} \cdot \sqrt{30ac}$

   (c) $\sqrt{2v^2 - v \cdot \sqrt{6v^2 - v \cdot \sqrt{2}^2}}$

   (d) $\dfrac{x^{-1} - y^{-1}}{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}}$

   (e) $(u-v)^2 \cdot \sqrt{1 + \dfrac{4uv}{(u-v)^2}}$ (1+2+2+2+2 Punkte)