Übungen zu Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 10. Dezember 2015, vor den Übungen

1. Bestimme die ersten fünf Folgenglieder folgender Partialsummen:

   (a) $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

   (b) $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{8k!+2}{2^k+3^k}$ (2+2 Punkte)

2. (a) Überprüfe die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ auf Konvergenz.

   (b) Eine andere (oft zu findende) Version des Quotientenkriteriums besagt im zweiten Teil:

   $$\textit{Ist } \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1 \textit{ für alle } k \geq k_0, \textit{ so ist die Reihe } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \textit{ divergent.}$$

   Zeige, dass diese Aussage nicht gleichbedeutend mit der Aussage aus Lemma 2.21 ist, sondern dass eine der beiden Aussagen stärker ist, indem Du eine Reihe angibst, deren Divergenz durch die eine Aussage nachgewiesen wird, durch die andere aber nicht. (2+3 Punkte)

3. Das Leibnizkriterium besagt:

   $$\textit{Es sei } (a_k)_{k=0}^{\infty} \textit{ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert } \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k.$$

   Überprüfe die folgenden Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$ auf Konvergenz:

   (a) mit $a_k = \frac{1}{k^2}$

   (b) mit $a_k = \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$ (2+2 Punkte)

4. Man nennt eine unendliche Reihe absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

   (a) Zeige, dass eine absolut konvergente Reihe, für die $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, auch konvergiert.

   (b) Gib eine Reihe an, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

   (c) Zeige mit dem Quotientenkriterium die absolute Konvergenz und mit dem Leibnizkriterium die Konvergenz der Reihe

   $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{k+1}{2^k}.$$

   (d) Zeige, dass die Partialsummen $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ dieser Reihe folgende explizite Darstellung besitzen:

   $$s_n = \frac{1}{9} \cdot \left(4 + (-1)^n \cdot \frac{3n+5}{2^n}\right).$$

   (e) Bestimme den Wert der Reihe aus Teilaufgabe c). (1+2+4+3+1 Punkte)