

Übungen zu Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: **Mittwoch, 16. Dezember 2015**, vor den Übungen

1. Bestimme den Grad und die Anzahl der Nullstellen folgender Polynome:

(a) $f_1(x) = x^4 + 4x^2 - 77$

(b) $f_2(x) = (x^2 + 1)^4 \cdot (x^2 - 1)$

(c) $f_3(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$ (1+1+1 Punkte)

2. (a) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $f(x)$ ein Polynom vom Grad n und $g(x)$ ein Polynom vom Grad m .
Es sei $c \in \mathbb{R}$, und wir betrachten die rationale Funktion

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} + c.$$

Wie viele Nullstellen kann $h(x)$ maximal besitzen?

(b) Eine Funktion $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt periodisch mit der Periode $\omega \neq 0$, wenn $\psi(x) = \psi(x + \omega)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Begründe, warum eine reelle, nichtkonstante rationale Funktion nicht periodisch sein kann.

(2+4 Punkte)

3. (a) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $\sin(-x) = -\sin x$ sowie $\cos(-x) = \cos x$ gilt.

(b) Es seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Zeige den Zusammenhang

$$\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \sin\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right).$$

(c) Bestimme damit den exakten Wert von $\sin\left(\frac{15}{4}\pi\right)$ und $\tan\left(\frac{15}{4}\pi\right)$. (2+4+2 Punkte)

4. (a) Es sei

$$f(x) := \frac{2x^3 + 5x^2 - 6}{x^3 - 1}.$$

Bestimme im Falle ihrer Existenz die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(b) Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten $g: \mathbb{R} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \frac{x^k - a^k}{x - a}.$$

Bestimme im Falle der Existenz den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

(c) Es sei

$$h(x) := x + 1 + \frac{x}{|x|}.$$

Zeige mit der Charakterisierung über Folgen, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ nicht existiert.

(2+3+2 Punkte)