ulm university universität **uulm**

Probeklausur zu Mathe für Biologen

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

keine Abgabe

1. Es seien die Mengen $A = \{2,3,5,7\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} \colon n \leq 10,\ n \text{ ist gerade}\}$ und $C = \{5\}$ gegeben.
   (a) Bestimme $A \cup B$, $B \cap C$, $A \backslash (B \backslash C)$ sowie $(C \backslash A) \cup B$ und gib jeweils an, wieviele Elemente die entstandenen Mengen enthalten.
   (b) Bestimme die Potenzmenge von $A \backslash (B \backslash C)$. (6+3 Punkte)

2. (a) Berechne den Wert von
$$\sum_{k=0}^{4} \frac{k^2 - 5k + 6}{1 + \sqrt{k}}$$
   (b) Zeige, dass $7 | (2^{3n} - 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
   (c) Bestimme $\binom{11}{8}$. (4+4+4 Punkte)

3. Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit
$$a_n = \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}$$
   (a) Überprüfe die Folge auf Konvergenz und bestimme ggfs. den Grenzwert.
   (b) Ist die Folge monoton bzw. beschränkt? (5+4 Punkte)

4. (a) Vereinfache die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich:
      i. $\sqrt{2v^2 - v \cdot \sqrt{6v^2 - v^2 \cdot \sqrt{2}^2}}$
      ii. $\dfrac{x^{-2} - y^{-2}}{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}}$
   (b) Löse die Gleichung $\ln a^{1/3} - (\ln \sqrt{a}) \cdot \ln a = 0$. (3+3+3 Punkte)

5. (a) Konvergiert oder divergiert die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^3}?$$
   (b) Zeige, dass die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3} - 1)^n$$
   konvergiert und bestimme deren Wert. (5+5 Punkte)

6. (a) Gib eine Definition folgender Begriffe an:
      i. Menge der rationalen Zahlen
      ii. Folge
      iii. Sinus
   (b) Formuliere den Binomischen Lehrsatz. (3+3+3+3 Punkte)

7. (a) Zeige unter Verwendung der Additionstheoreme von Sinus und Cosinus

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

für alle diejenigen x und y, für die dieser Ausdruck definiert ist.

(b) Bestimme den Definitionsbereich dieses Ausdrucks. (3+5 Punkte)

8. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Untersuche die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 4 & \text{für } x \leq 2 \\ 3x - a \cdot \ln(x-1) & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. (8 Punkte)

9. Es sei $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 + 6x - 40}$$

gegeben.

(a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich D_f.

(b) Berechne die Ableitung von f und vereinfache soweit wie möglich.

(c) Bestimme die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 4} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} f(x).$$

(d) Ist f auf dem Intervall $I = [0, 1]$ monoton? (3+4+4+3 Punkte)

10. Es sei $I = [-1, 4]$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 7$.

(a) Bestimme die Koordinaten aller lokalen Extrema von f in I.

(b) Bestimme die Koordinaten des globalen Maximums und des globalen Minimums von f in I. (6+4 Punkte)

11. Berechne folgende Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)\, dx$

(b) $\displaystyle\int_1^e (x^2 - 1) \cdot \ln x\, dx$

(c) $\displaystyle\int_1^4 e^{-\sqrt{x}}\, dx$ (4+4+4 Punkte)

Viel Erfolg!