Vorabskript zur Vorlesung

Mathematik für Biologen

Wintersemester 2015/ 16

Prof. Dr. Helmut Maier
Dr. Hans- Peter Reck

Institut für Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitstheorie
Universität Ulm

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

Zu einer einfachen Beschreibung von mathematischen Zusammenhängen dient der Begriff der Menge.

1.1 Mengen

1.1 Definition:
Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten.
Diese Objekte werden Elemente der Menge genannt.

Schreibweise:
$x \in M$ bedeutet, dass x ein Element der Menge M ist, also zu M gehört.
$x \notin M$ bedeutet, dass x kein Element der Menge M ist, also nicht zu M gehört.

Bemerkung:
Dieser "naive" Mengenbegriff geht auf Georg Cantor (1845-1918) zurück.
In der "höheren" Mathematik entstehen mit dieser Definition Probleme, was zur Russellschen Antinomie führt. Deshalb gibt es eien axiomatische Mengenlehre in der Mathematik.

Bemerkung:
Für unsere Zwecke reicht der Mengenbegriff im Sinne der Definition 1.1.

Beschereibung von Mengen:

- aufzählende Beschreibung:

$$\begin{aligned} M &= \{a, b, c, \ldots, x, y, z\} \\ M &= \{1, 3, 5\} \\ M &= \{*, \cdot\} \\ M &= \{S, T\} \\ M &= \{r, g\}. \end{aligned}$$

- charakterisierende Beschreibung:

$$M = \{x \colon x \text{ hat Eigenachaft E}\}.$$

Bemerkung:
Manchmal sind auch beide Schreibweisen gleichzeitig möglich:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{B, I, O, L, O, G, I, E\} \\ M_2 &= \{B, I, O, L, G, I, E\} \\ M_3 &= \{B, I, O, L, G, E\} \\ M_4 &= \{x\colon x \text{ ist ein Buchstabe im Wort "Biologie"}\}. \end{aligned}$$

Die Gleichheit der Mengen M_1, M_2 und M_3 ergibt sich aus der nächsten Definition.

1.2 Definition: (Verknüpfungen von Mengen)
Es seien M_1 und M_2 Mengen.

i) Man nennt M_1 Teilmenge von M_2 (Schreibweise: $M_1 \subseteq M_2$), wenn für alle $x \in M_1$ auch $x \in M_2$ gilt.

ii) Die Mengen M_1 und M_2 heißen gleich (Schreibweise: $M_1 = M_2$, wenn $M_1 \subseteq M_2$ und $M_2 \subseteq M_1$ gilt.

iii) Die Vereinigung der Mengen M_1 und M_2 ist durch

$$M_1 \cup M_2 = \{x\colon x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$$

definiert.

iv) Der Durchschnitt der Mengen M_1 und M_2 ist durch

$$M_1 \cap M_2 = \{x\colon x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$$

definiert.

v) Die Differenz der Mengen M_1 und M_2 ist durch

$$M_1 \backslash M_2 = \{x\colon x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$$

definiert.

vi) Die Menge, die kein Element hat, bezeichnet man als leere Menge $\emptyset$.

vii) Die Mengen M_1 und M_2 heißen disjunkt (durchschnittsleer), wenn $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ gilt.

viii) Falls alle auftretenden Mengen M Teilmengen einer Grundmenge X sind, so nennt man X die Grundmenge.
Für $M \subseteq X$ heißt dann $M^C = X \backslash M$ das Komplement von M, also $M^C = \{x \in X : x \notin M\}$.

ix) Für eine Menge M bezeichnet man mit $|M|$ (selten auch mit $\#M$) die Anzahl ihrer Elemente. So gilt etwa für $M_1 = \{1, 2, 3\}$ und $M_2 = \{5, 6, 7, 8, \ldots\}$ einerseits $|M_1| = 3$ und $|M_2| = \infty$ (unendlich).

Bemerkung :
Gelegentlich ist auch noch folgende Formulierung üblich:
Man nennt M_1 echte Teilmenge von M_2 (Schreibweise: $M_1 \subset M_2$), wenn $M_1 \subseteq M_2$ und ein $x \in M_2$ mit $x \notin M_1$ existiert.
Meist schreibt man $M_1 \subset M_2$ und lässt dabei beide Fälle zu. Mit dieser Vereinbarung fahren wir ab nun fort.

1.3 Beispiele:

Es sei die Grundmenge durch $X = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ gegeben. Weiter gelte $A = \{2, 3, 4, 5\}$ und $B = 4, 5, 6, 7\}C$. Dann gelten folgende Aussagen:

i) $A^C = X \backslash A = \{0, 1, 6, 7, 8, 9\}$

ii) $A \cap B = \{4, 5\}$

iii) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

iv) $A \backslash B = \{2, 3\}$

v) $B \backslash A = \{6, 7\}$

vi) $(A \backslash B) \cap (B \backslash A) = \{2, 3\} \cap \{6, 7\} = \emptyset$

vii) $|X| = \#X = 10$, $|A| = \#A = 4$, $|B| = \#B = 4$

1.4 Venn- Diagramme (auch Eulersche Kreise):

Mengen und Verknüpfungen von Mengen lassen sich in sogenannten "Venn- Diagrammen" darstellen.

"Rechenregeln" für Mengen formuliert:

1.5 Lemma:

Es sei Ω eine Grundmenge, und es seien A, B, C Mengen mit $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ und $C \subset \Omega$. Dann gelten folgende Aussagen:

i) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \Omega = \Omega$ und $A \cap \Omega = A$
Diese Aussagen lassen sich allgemeiner formulieren:
Für $A \subset B$ gilt $A \cap B = A$ und $A \cup B = B$

ii) Es gelten die "de Morganschen Gesetze":
$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ und $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ Es gilt das Assoziativgesetz:
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ und $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ Es gilt das Distributivgesetz:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ und $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Beweis: (von (iv), erste Gleichung)
Wir zeigen zuerst $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Es gilt $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A$ oder $x \in B \cap C$.
Es sei $x \in A$. Dann folgt $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$. Somit gilt $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Es sei $x \in B \cap C$. Dann folgt $x \in B$ und $x \in C$. Somit gilt auch $x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$, woraus wieder $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ folgt.
Also gilt $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Wir zeigen noch $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.
Es gilt $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Leftrightarrow x \in A \cup B$ und $x \in A \cup C$.
Es sei $x \in A$. Dann folgt $x \in A \cup (B \cap C)$.
Es sei $x \notin A$. Dann folgt $x \in B$ und $x \in C$, also $x \in B \cap C$. Somit gilt auch $x \in A \cup (B \cap C)$.
Also gilt auch $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$ und damit die Behauptung.

1.2 Die Menge der reellen Zahlen

Für den Zahlenaufbau gelten die folgenden Inklusionen:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Dabei gilt:
<u>Menge der natürlichen Zahlen:</u>

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

sowie

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Die Menge $\mathbb{N}$ ist abgeschlossen bzgl. der Addition und der Multiplikation, d.h.

$$\forall n, m \in \mathbb{N}\ (\mathbb{N}_0) \text{ gilt } n + m \in \mathbb{N}\ (\mathbb{N}_0) \text{ und } n \cdot m \in \mathbb{N}\ (\mathbb{N}_0).$$

Aber: $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}_0$) ist nicht abgeschlossen bzgl. der Differenz:

$$3 - 5 = -2 \notin \mathbb{N}\ (\mathbb{N}_0).$$

<u>Menge der ganzen Zahlen:</u>

$$\mathbb{Z} = \{0, -1, -2, -3, \ldots\} \cup \mathbb{N}.$$

Die Menge $\mathbb{Z}$ ist abgeschlossen bzgl. der Addition, Subtraktion und der Multiplikation, d.h.

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} \text{ gilt } n + m \in \mathbb{Z}, n - m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \cdot m \in \mathbb{Z}.$$

Aber: $\mathbb{Z}$ ist nicht abgeschlossen bzgl. der Division:

$$3 \in \mathbb{Z} \text{ und } 5 \in \mathbb{Z}, \text{ aber } \frac{3}{5} \notin \mathbb{Z}.$$

<u>Menge der rationalen Zahlen:</u>

$$\mathbb{Q} = \{x \colon x = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Für $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ gilt jetzt

$$q_1 \pm q_2 \in \mathbb{Q},\ q_1 \cdot q_2 \in \mathbb{Q} \text{ und } \frac{q_1}{q_2} \in \mathbb{Q}, \text{ falls } q_2 \neq 0.$$

Also ist $\mathbb{Q}$ abgeschlossen gegenüber den vier Grundrechenarten.

<u>Hinweis:</u>
Die Menge der rationalen Zahlen ist dennoch zu klein!
Will man jedem Punkt auf der Zahlengeraden eine Zahl zuordnen, so reichen die obigen Zahlenmengen nicht aus.

<u>1.6 Satz:</u>
Es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = x \cdot x = 2$.

<u>Beweis:</u> (indirekt, "tertium non datur")
Hilfsüberlegung:
Es sei $p \in \mathbb{N}$ und p^2 eine gerade Zahl, also $p \geq 2$. Dann ist auch p eine gerade Zahl.

Beweis:
Wir nehmen an, p sei ungerade.
Dann sind $p+1$ und $p-1$ gerade, womit auch $(p+1)\cdot(p-1) = p^2-1$ gerade ist. Dann wäre aber p^2 ungerade, ein Widerspruch.

Beweis des Satzes:
Wir nehmen an, es gelte $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ und p und q seien teilerfremd.
Dann gilt

$$\sqrt{2}^2 = 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2,$$

womit p^2 gerade ist und nach der Hilfsüberlegung somit auch p. Also gilt $p = 2r$, woraus

$$p^2 = 4r^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2r^2$$

folgt. Somit ist q^2 und damit auch q gerade, d.h. $q = 2s$.
Also könnte man $\frac{p}{q}$ durch 2 kürzen, ein Widerspruch. Damit ist die Annahme falsch, weswegen die Behauptung gilt.

Ergänzung:
Analog gilt:

$$x^3 = 2,\ x^2 = 3,\ x^2 = 17$$

haben keine rationalen Lösungen.

Menge der reellen Zahlen:

Die Menge $\mathbb{R}$ besteht aus den rationalen un den irrationalen Zahlen.

$$\mathbb{R} := \{x\colon x \text{ ist Dezimalbruch } x = m, a_1a_2a_3\ldots,\ \ m \in \mathbb{Z}, a_1, a_2, a_3 \ldots \in \{0,1,2,\ldots,9\}\}.$$

Hinweis:
rationale Zahl: endlicher oder periodischer Dezimalbruch
irrationale Zahl: unendlicher nichtperiodischer Dezimalbruch.

Beispiele:

1. $\frac{3}{4} = 0,75 \in \mathbb{Q}$ (rational)
2. $\frac{1}{3} = 0,33\overline{3} \in \mathbb{Q}$, denn

$$\begin{aligned} x &= 0,333\ldots \\ -(10x &= 3,333\ldots) \\ \Rightarrow -9x &= -3, \end{aligned}$$

   also $x = \frac{1}{3}$.
3. $0,567\overline{5} \in \mathbb{Q}$, denn

$$\begin{aligned} 1000x &= 567,\overline{5}\ldots \\ -(10000x &= 5675\overline{5}\ldots) \\ \Rightarrow -9000x &= -5108, \end{aligned}$$

   also $x = \frac{1277}{2250}$.

4. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (irrational)

5. $\pi \notin \mathbb{Q}$ (irrational)

6. $e \notin \mathbb{Q}$ (irrational)

Für rationale Zahlen gilt noch der folgende Satz:
Eine rationale Zahl $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ist als endlicher oder (gemischt-) periodischer Dezimalbruch darstellbar.

Beispiele:

1. $3,2157 = 3,2157\overline{0}$

2. $0,2851\overline{963}$

3. $0,\overline{7815}$

1.3 Anordnung der reellen Zahlen

Identifiziert man die reellen Zahlen mit der Zahlengeraden, so erhält man eine Ordnung auf $\mathbb{R}$:

$$''a \text{ kleiner als } b'': \;\Leftrightarrow'' a \text{ links von } b'' \Leftrightarrow a < b.$$

Beispiele:

$$0 < 3, \quad -2 < 7, \quad -3 < -1.$$

Notation:

$$\begin{aligned} b > a \quad &:\Leftrightarrow \quad a < b \\ a \leq b \quad &:\Leftrightarrow \quad a < b \text{ oder } a = b \\ b \geq a \quad &:\Leftrightarrow \quad b > a \text{ oder } a = b. \end{aligned}$$

1.7 Rechenregeln:
Für das Rechnen mit Ungleichungen gelten die folgenden Regeln: Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt

(R0) $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$

(R1) $a < b$ und $c < d \Rightarrow a + c < b + d$

(R2) $a < b \Rightarrow \begin{cases} a \cdot c < b \cdot c & \text{für } c > 0 \\ a \cdot c = b \cdot c & \text{für } c = 0 \\ a \cdot c > b \cdot c & \text{für } c < 0. \end{cases}$

(R3) $a > 0,\, b > 0,\, a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

(R4) $a < 0,\, b < 0,\, a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$

(R5) $a < b,\, b < c \Rightarrow a < c$ (Transitivität)

1.8 Definition:
Der (absolute) Betrag einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ (Schreibweise: $|a|$) ist

$$|a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

Interpretation:
Abstand der Zahl a auf der Zahlengeraden vom Nullpunkt.

Eigenschaften des Betrages:

1. $| a |\geq 0$
2. $| a |=| -a |$
3. $a \leq| a |$
4. $| a |= 0 \Longleftrightarrow a = 0$
5. $| a \cdot b |=| a | \cdot | b |$
6. $| \frac{a}{b} |= \frac{|a|}{|b|}$ für $b \neq 0$
7. $| a + b |\leq| a | + | b |$ (**Dreiecksungleichung**)

   Beweis: Wenn $a + b \geq 0$, dann gilt

   $$| a + b |= a + b \leq| a | + | b | \, .$$

   Falls $a + b \leq 0$, dann gilt

   $$| a + b |= -a - b = (-a) + (-b) \leq| -a | + | -b |=| a | + | b | \, .$$

8. $| a - b |\leq c \Longleftrightarrow -c \leq a - b \leq c$

   Beweis: Offenbar gilt $c \geq 0$. Falls

   $$a - b \geq 0,$$

   dann folgt

   $$| a - b |\leq c \Longleftrightarrow -c \leq 0 \leq a - b \leq c.$$

   Falls $a - b \leq 0$, dann folgt

   $$| a - b |\leq c \Longleftrightarrow b - a \leq c \Longleftrightarrow -c \leq a - b \leq 0 \leq c.$$

1.4 Summen und Produkte

1.9 Definition:

Für $m, n \in \mathbb{C}$ mit $m \leqslant n$ und $x_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, sei

$$\sum_{l=m}^{n} x_l = x_m + x_{m+1} + ... + x_n$$

Beispiele:

- $\sum_{l=1}^{4}\left(\frac{1}{2^l}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}$
- $\sum_{l=-1}^{4}(2l+1) = 2\cdot(-1)+1+2\cdot 0+1+2\cdot 1+1+2\cdot 2+1+2\cdot 3+1+2\cdot 4+1$
- $\sum_{l=-1}^{3} l = -1+0+1+2+3$
- $\sum_{l=3}^{5}(-1)^l = (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5$

Es gelten die folgenden Rechenregeln

1.10 Satz:
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

1. $\sum_{l=1}^{n} x_l + \sum_{l=1}^{n} y_l = \sum_{l=1}^{n}(x_l + y_l)$,

   wobei $x_l, y_l \in \mathbb{R}$.
2. $\sum_{l=1}^{n} a \cdot x_l = a \cdot \sum_{l=1}^{n} x_l$,

   wobei $a \in \mathbb{R}$
3. $\sum_{l=0}^{n-1} x_{l+1} = \sum_{l=2}^{n+1} x_{l-1}$

   (unterschiedliche Darstellung desselben Wertes).

Beweis: (nur zu 3.)
$\sum_{l=0}^{n-1} x_{l+1} = x_1 + x_2 + ... + x_n$
$\sum_{l=2}^{n+1} x_{l-1} = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

1.11 Satz:
Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ gilt

1. $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$
2. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$
3. $\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$ (**Teleskopsumme**)
4. $\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $x \neq 1$ (**geometrische Summenformel**)

Beweis:

1. Trivial
2. Beweisen wir später mit vollständiger Induktion.

3. Beweisen wir später mit vollständiger Indutkion.

4. $$(1-x)\cdot\sum_{k=0}^{n}x^k=\sum_{k=0}^{n}x^k-x\cdot\sum_{k=0}^{n}x^k=\sum_{k=0}^{n}x^k-\sum_{k=0}^{n}x^{k+1}=$$
$$=(x^0+x^1+x^2+...+x^n)-(x^1+x^2+...+x^n+x^{n+1})=x^0-x^{n+1}=1-x^{n+1}$$

Definition 1.11:
Für $m,n\in\mathbb{N}$ mit $m<n$ sei

1. $\prod_{k=m}^{n}x_k:=x_m\cdot x_{m+1}\cdot\ ...\cdot x_n$
2. $n!:=\prod_{k=1}^{n}k=1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot n$ (**n-Fakultät**)
3. $0!:=1$

Beispiel:

1. $\prod_{k=1}^{3}k=1\cdot2\cdot3=6$
2. $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$

1.5 Vollständige Induktion und Bernoulli-Ungleichung

Idee: $A(n)$ sei eine Aussage, die von einer natürlichen Zahl $n\in\mathbb{N}$ abhängt. Um zu zeigen, dass $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n\in\mathbb{N}$ gilt, geht man in zwei Schritten vor:

1. Zeige: $A(1)$ ist gültig;
2. Zeige: aus der Gültigkeit von $A(n)$ folgt stets die Gültigkeit von $A(n+1)$;

dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gültig.

1.12 Lemma: (Vollständige Induktion)

1. $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$

   Beweis: Für $n=1$ folgt
   $$\sum_{k=1}^{1}k=1=\frac{1\cdot(1+1)}{2},$$
   was eine wahre Aussage ist (Induktionsanfang).
   Die Behauptung gelte nun für ein $n\in\mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Zu zeigen ist, dass die Behauptung auch für $n+1$ gilt:
   $$\sum_{k=1}^{n+1}k=\sum_{k=1}^{n}k+(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)}{2}+n+1,$$

wobei die letzte Gleichheit nach Induktionsvoraussetzung gilt. Weiter folgt

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n \cdot (n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2}$$

und damit die Behauptung.

2. $\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$

   Beweis: Für $n = 1$ folgt

   $$\sum_{k=1}^{1}(x_{k+1} - x_k) = x_2 - x_1 = x_{1+1} - x_1,$$

   was eine wahre Aussage ist. (Induktionsanfang).
   Die Behauptung gelte nun für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Zu zeigen ist, dass die Behauptung auch für $n + 1$ gilt:

   $$\sum_{k=1}^{n+1}(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) + (x_{n+2} - x_{n+1}) = x_{n+1} - x_1 + x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+2} - x_1,$$

   wobei die vorletzte Gleichheit nach Induktionsvoraussetzung gilt.

3. Bernoulli-Ungleichung

   Sei $x > -1$, $x \in \mathbb{R}$; dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

   $$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

   Beweis: Für $n = 1$ folgt

   $$(1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x,$$

   was eine wahre Aussage ist. (Induktionsanfang).
   Die Behauptung gelte nun für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Zu zeigen ist, dass die Behauptung auch für $n + 1$ gilt:

   $$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n \cdot (1 + x) \geq (1 + n \cdot x) \cdot (1 + x),$$

   wobei die Ungleichung aus der Induktionsvoraussetzung folgt. Weiter gilt:

   $$(1 + n \cdot x) \cdot (1 + x) = 1 + n \cdot x + x + n \cdot x^2 = 1 + (n+1) \cdot x + n \cdot x^2 \geq 1 + (n+1) \cdot x,$$

   weil $n \cdot x^2 > 0$. Damit folgt die Behauptung.

4. Die Zahl $9^n - 1$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 8 teilbar (ohne Rest), d.h.

   $$\frac{9^n - 1}{8} \in \mathbb{N}$$

Beweis: Für $n = 1$ folgt

$$\frac{9^1 - 1}{8} = 8 \in \mathbb{N},$$

was eine wahre Aussage ist. (Induktionsanfang).
Die Behauptung gelte nun für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Zu zeigen ist, dass die Behauptung auch für $n + 1$ gilt:

$$\frac{9^n - 1}{8} = k \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow 9^n = 8k + 1.$$

Weiter gilt:

$$\frac{9^n - 1}{8} = \frac{9 \cdot 9^n - 1}{8} = \frac{9 \cdot (8k + 1) - 1}{8} = \frac{72k + 9 - 1}{8} =$$
$$= \frac{72k + 8}{8} = 9k + 1,$$

woraus die Behauptung folgt, weil $9k + 1 \in \mathbb{N}$.

5. Bei vollständiger Induktion sind beide Schritte wichtig; dies zeigen die beiden folgenden Beispiele:

   - Nach Leonhard Euler liefert $p = n^2 - n + 41$ für $n = 1, 2, 3, ..., 40$ die Primzahlen $p = 41, 43, 47, ..., 1601$; die Vermutung, dass dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt ist falsch: $n = 41$ liefert $p = 41^2$ (keine Primzahl). $\rightarrow$ unvollständige Induktion
   - Behauptung:

     $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + 3,$$

     was nach 1.11 falsch ist.
     Es gibt keine Induktionsverankerung aber der Induktionsschluss lässt sich durchführen:

     $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n + 1) = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + 3 + n + 1,$$

     nach Induktionsvoraussetzung. Weiter gilt

     $$\frac{n \cdot (n + 1)}{2} + 3 + n + 1 = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + 3 + \frac{2 \cdot (n + 1)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} + 3.$$

     $\rightarrow$ unvollständige Induktion

1.6 Der Binomische Lehrsatz

Motivation

1. In ein Bücherregal sollen 10 Bücher eingeordnet werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese einzuordnen?
   1.Buch: 10 Möglichkeiten
   2.Buch: 9 Möglichkeiten

3.Buch: 8 Möglichkeiten
...
10.Buch: 1 Möglichkeit
$\to$ Anzahl der Möglichkeiten: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot ... \cdot 1 = 10!$

2. Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus diesen 10 Büchern 3 Exemplare zu entnehmen?

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{7!}$$

3. Legt man in 2. keinen Wert auf die Reihenfolge, so reduziert sich die Anzahl von $\frac{10!}{7!}$ auf $\frac{10!}{7! \cdot 3!}$

Hinweis: Die Anzahl der Anordnung von n Zahlen ist gegeben durch

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = n!$$

Beispiel:

$$X = \{1, 2, 3\},\ 3! = 6;$$

$$(1, 2, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2); (1, 3, 2); (2, 1, 3); (3, 2, 1)$$

Dies gibt Anlass zu folgender Definition:

Definition 1.12 (Binomialkoeffizient)
Für $k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$ sei

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$ heißt Binomialkoeffizient;
speziell: $\binom{n}{0} = 1$
Sprechweise: "n über k"

Beispiele:

1. $$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

2. $$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4! \cdot (4-4)!} = \frac{1}{0!} = 1$$

3. $$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

Satz 1.14(Eigenschaften des Binomialkoeffizienten)

1. für $n \in \mathbb{N}$ gilt $n! = (n-1)! \cdot n$
2. für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k > n$ setzen wir $\binom{n}{k} = 0$
4. für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

<u>Beweis</u>

1. trivial
2. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ und $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$
3. nichts zu zeigen
4. sei $k < n$. Dann

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{(n+1)!}{(n-k-1)! \cdot (k+1)!} =$$
$$= \frac{n! \cdot (k+1)}{(n-k)! \cdot k! \cdot (k+1)} + \frac{(n+1)! \cdot (n-k)}{(n-k)! \cdot (k+1)!} =$$
$$= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

und

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n+1-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}.$$

Es gilt die <u>Binomische Formel</u> für $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Diese Formel kann man verallgemeinern durch

<u>Satz 1.15</u> Für $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ gilt

1. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
2. $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (-b)^{n-k}$

<u>Beweis:</u>
Wir gehen induktiv vor
<u>Induktionsschritt:</u> Behauptung gilt für $n = 1$

Linke Seite: $(a+b)^1 = a + b$

Rechte Seite: $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = b + a$

<u>Induktionsschritt:</u>Die Behauptung gelte für ein n (<u>Induktionsvoraussetzung</u>), wir zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gilt.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k(-b)^{n-k} \cdot (a+b) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= \binom{n}{0} ab^n + \binom{n}{1} a^2b^{n-1} + \binom{n}{2} a^3b^{n-2} + ... + \binom{n}{n} a^{n+1} +$$

$$+ \binom{n}{0} b^{n+1} + \binom{n}{1} ab^n + \binom{n}{2} a^2b^{n-1} + ... + \binom{n}{n} a^n b =$$

$$= \binom{n}{0} b^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] ab^n + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] a^2b^{n-1} + ... + \binom{n}{n} a^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] ab^n + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] a^2b^{n-1} + ... + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

<u>Beispiele:</u>

1. $(\frac{1}{2} + x^2)^5 = ?$
   Binomischer Satz für $a = \frac{1}{2}$, $b = x^2$, $n = 5$:

   $$(\frac{1}{2} + x^2)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (\frac{1}{2})^k (x^2)^{5-k}$$

   <u>Frage:</u> Welcher Faktor steht bei x^4?
   <u>Antwort:</u> Für $k = 3$ gilt

   $$\binom{5}{3} (\frac{1}{2})^3 = \frac{5!}{3!2!} (\frac{1}{2})^3 = ... = \frac{5}{4}$$

2. $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus eienr n-elementigen Menge M eine k-elementige Teilmenge auszuwählen:

   - $M = \{a, b, c, ...x, y, z\}$, Alphabet; $\mid M \mid = 26$

     <u>Frage:</u> Wieviele 3-elementige Teilmengen gibt es?

     <u>Antwort:</u> $\binom{26}{3} = \frac{26!}{3!23!}$
   - $M = \{1, 2, 3, ...49\}$, "Lottozahlen"; $\mid M \mid = 49$

     <u>Frage:</u> Wieviele 6-elementige Teilmengen gibt es?

     <u>Antwort:</u> $\binom{49}{6} = ... = 13983816$

1.7 Funktionen

Definition 1.16:

Seien $X, Y \subset \mathbb{R}$; eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ zuordnet, heißt Funktion (oder Abbildung) von X nach Y.

Notation: $f : X \to Y, f(x) = y$

- X: Definitionsbereich von f
- Y: Bildbereich von f (nicht jedes $y \in Y$ muss ein Funktionswert sein!)
- für $A \subset X$ ist $f(A) = \{y \mid y = f(x),\, x \in A\}$
- $f(A)$ heißt das Bild von A unter f
- $f(X)$ heißt Wertbereich von f

Definition 1.17:
Für $X, Y \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : X \to Y$ ist der Graph von f definiert über

$$graph(f) := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}, x \in X \right\}$$

Definition 1.18: (Ergänzung zum Graphen einer Funktion)
Für $X, Y \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

$$epi(f) := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, f(x) \leq \alpha \right\}$$

Epigraph von f.

Kapitel 2

Folgen und Reihen

2.1 Folgen

Definition 2.1:

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sind Intervalle definiert:

1. offenes Intervall
$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\} \; a < b$$
2. geschlossenes Intervall
$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} \; a \leq b$$
3. halboffene Intervalle
$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\} \; a < b$$
$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} \; a < b$$

Im Zusammenhang mit Funktionen und Folgen wird noch eine Erweiterung der reellen Zahlen benötigt.

Definition 2.2:
∞ und $-\infty$ seien zwei Objekte, die keine reellen Zahlen sind, und für die gilt:

1. $-\infty < a < \infty \, \forall a \in \mathbb{R}$
2. $a + \infty = \infty$, $a + (-\infty) = -\infty \, \forall a \in \mathbb{R}$
3. $\frac{a}{\pm\infty} = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$
4. nicht definiert sind $\frac{\infty}{\infty}$ und $\infty + (-\infty)$

Beispiel: Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ gilt
$$f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$$
Für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = -x^2$ gilt
$$g(\mathbb{R}) = (-\infty, 0]$$

Definition 2.3:
Eine Folge ist eine Vorschrift, die jeder Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ eine reelle Zahl s_n zuordnet. Eine Folge ist demnach eine Abbildung von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{R}$. Der Definitionsbereich einer Folge kann auch eine echte Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ sein.

Beispiele:

1. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$
2. $((-1)^n)_{n=0}^{\infty} = 1, -1, 1, -1, ...$
3. $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, ...$
4. $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=5}^{\infty} = \frac{1}{5^2}, \frac{1}{6^2}, \frac{1}{7^2}, ...$

Oft ist danach gefragt wie sich eine Folge langfristig entwickelt.

Definition 2.4:
Eine Folge $(s_n)_{n=k}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$ heißt konvergent genau dann, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall n > n_0(\varepsilon) : \mid s_n - s \mid < \varepsilon;$$

s heißt Grenzwert(Limes) von $(s_n)_{n=k}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$;

Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ oder $s_n \to s \, (n \to \infty)$

Beispiel

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

   denn: für $\varepsilon > 0$ wähle $n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$; für $n > n_0(\varepsilon)$ gilt dann $\frac{1}{n} < \varepsilon$ und

   $$\mid \frac{1}{n} - 0 \mid = \mid \frac{1}{n} \mid = \frac{1}{n} < \varepsilon;$$

   also gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
2. $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n}) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n}) = 1$
3. $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ für $\mid q \mid < 1$, d.h. $-1 < q < 1$

   Beweis:

   $$\mid q^n \mid < \varepsilon \Rightarrow \mid q \mid^n < \varepsilon \Rightarrow \sqrt[n]{\mid q \mid^n} < \sqrt[n]{\varepsilon}$$

   $$\Rightarrow \mid q \mid < \sqrt[n]{\varepsilon} \Rightarrow \mid q \mid < \varepsilon^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \ln(q) < \frac{1}{n} \ln(\varepsilon) \Rightarrow n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln \mid q \mid}$$

   mit $0 < \varepsilon < 1$, d.h. $\ln(\varepsilon) < 0$, gilt $n_0 = \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln|q|}$;

dann gilt

$$n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln \mid q \mid} \Rightarrow n \cdot \ln \mid q \mid < \ln(\varepsilon) \Rightarrow \ln \mid q \mid^n < \ln(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \mid q \mid^n < \varepsilon \Rightarrow \mid q^n \mid < \varepsilon$$

<u>Satz 2.5:</u>
Seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b\,(n \to \infty)$; dann gilt

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$
2. $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$, $b_n, b \neq 0$
3. $\lim_{n\to\infty} \mid a_n \mid = \mid a \mid$

<u>Beispiel:</u>

$$a_n = \frac{4n^3 + 2n}{5n^3 + 8} = \frac{n^3(4 + \frac{2}{n^3})}{n^3(5 + \frac{8}{n^3})} = \frac{4 + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{8}{n^3}} \to \frac{4}{5}(n \to \infty)$$

<u>Satz 2.6:</u>
Seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to a\,(n \to \infty)$ und $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

<u>Spezialfall:</u> Sei $c_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $c_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt

$$b_n \to 0\,(n \to \infty) \Rightarrow c_n \to 0\,(n \to \infty)$$

<u>Beispiele:</u>

1. $\frac{1}{n^k} \to 0\,(n \to \infty)\,\forall k \in \mathbb{N}$, denn
   $\frac{1}{n^k} \geq 0$ und $\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n} \to 0$.
2. $\mid \frac{n^2-1}{n^2+1} - 1 \mid \to 0\,(n \to \infty)$, denn

$$\mid \frac{n^2-1}{n^2+1} - 1 \mid = \mid \frac{n^2 - 1 - n^2 - 1}{n^2+1} \mid = \mid \frac{-2}{n^2+1} \mid = 2 \cdot \frac{1}{n^2+1} \leq 2 \cdot \frac{1}{n} \to 0.$$

<u>Definition 2.7:</u>(Bezeichnung)

1. Eine Folge, die <u>nicht konvergiert</u>, heißt <u>divergent</u>;
2. $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ heißt <u>Nullfolge</u>, falls $a_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Hinweis:

1. Ist $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge mit $a_n \to 0$ für $n \to \infty$, so ist
$$(\mid a_n - a \mid)_{n=0}^{\infty}$$
eine Nullfolge; es gilt
$$a_n \to a \Longleftrightarrow \mid a_n - a \mid \to 0 \, (n \to \infty)$$
2. Der Grenzwert einer Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ist eindeutig:
$$a_n \to a, \, a_n \to \hat{a} \Rightarrow a = \hat{a}$$

Idee: $\mid a - \hat{a} \mid = \mid a - a_n + a_n - \hat{a} \mid \leq \mid a - a_n \mid + \mid a_n - \hat{a} \mid \to 0 + 0$
also $\mid a - \hat{a} \mid = 0$, d.h. $a = \hat{a}$.

Definition 2.8:
Eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ nennt man

1. beschränkt genau dann, wenn
$$\exists K > 0 : \mid a_n \mid \leq K \, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$
2. monoton wahchsend genau dann, wenn gilt
$$a_{n+1} \geq a_n \, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$
3. monoton fallend genau dann, wenn gilt
$$a_{n+1} \leq a_n \, \forall n \in \mathbb{N}_0$$
4. streng monoton wachsend (fallend) genau dann, wenn gilt
$$a_{n+1} > a_n \, (a_{n+1} < a) \, \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Beispiel

1. $(a_n)_{n=0}^{\infty} = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n=0}^{\infty}$ ist streng monoton fallend und beschränkt, denn
$$\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$$
und
$$\mid \frac{1}{n+1} \mid \leq 1 := K \, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$
2. $(a_n)_{n=0}^{\infty} = ((-1)^n)_{n=0}^{\infty}$ ist beschränkt, aber nicht monoton, sondern alternierend!

Satz 2.9

1. Jede konvergente Folge ist beschränkt

   Idee: Für $\varepsilon > 0$ und $n \geq n(\varepsilon)$ gilt

   $$| a_n - a |< \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon + a < a_n < \varepsilon + a;$$

   also sind die Folgeglieder ab $n = n(\varepsilon)$ beschränkt; die ersten $n(\varepsilon) - 1$ (endlich viele) Elemente der Folge sind auch beschränkt, also sind alle Elemente der Folge beschränkt.

2. jede monoton wachsende (oder fallende) beschränkte Folge ist konvergent

Beispiel:

Sei $q > 0$ und $a_n := \frac{q^n}{n!}$;

Monotonie:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{q^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{q^n}{n!}} = \frac{q^{n+1} \cdot n!}{q^n \cdot (n+1)!} = \frac{q}{(n+1)};$$

weiter gilt

$$\frac{q}{n+1} \leq 1 \Leftrightarrow n \geq q + 1,$$

also ist a_n monoton fallend für $n \geq q + 1$.

Beschränktheit: Die ersten (endlich vielen) Elemente der Folge stören nicht. Wegen der Monotonie und $a_n > 0$ ist die Folge beschränkt.

Da a_n beschränkt ist und $\frac{q}{n+1}$ eine Nullfolge ist, folgt insgesamt, dass a_n gegen 0 konvergiert:

$$\frac{q^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{q}{n+1} \cdot \frac{q^n}{n!} \to 0 \, (n \to \infty).$$

2.2 Potenzen reeller Zahlen

Bisher ist bekannt: für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- $x^n = \prod_{i=1}^n x$
- $x^0 = 1$

Definition 2.10:

1. Für $n \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$, ist

   $$x^{-n} := \frac{1}{x^n}.$$

2. Für $n \in \mathbb{N}$ $x \geq 0$ existiert eine eindeutige Lösung der Gleichung $x = y^n$; diese Lösung wird mit

   $$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

   bezeichnet.

3. Für $q \in \mathbb{Q}$ mit $q = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ und $x \geq 0$ schreibt man

$$x^q = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

4. Für $q \in \mathbb{R}$ und eine Folge $(q_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $q_n \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} q_n = q$ setzt man für $x > 0$

$$x^q = \lim_{n\to\infty} x^{q_n}$$

Hinweis:
Für $n \in \mathbb{N}, x < 0$ existiert eine eindeutige Lösung y der Gleichung $x = y^n$ mit $y = \sqrt[n]{x} \notin \mathbb{R}$; y heißt dann komplexe Zahl.

Beispiel:
Für $x > 0$ gilt

$$x^{-0.8} = x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{x}^{\frac{4}{5}} = \frac{1}{\left(\sqrt[5]{x}\right)^4};$$

es gilt Monotonie:
für $x < y$ gilt

$$\sqrt[5]{y} > \sqrt[5]{x} \Rightarrow \left(y^{\frac{1}{5}}\right) > \left(x^{\frac{1}{5}}\right) \Rightarrow \left(y^{\frac{1}{5}}\right)^4 > \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^{\frac{4}{5}}} < \frac{1}{x^{\frac{4}{5}}} \Rightarrow y^{-0.8} < x^{-0.8}$$

Satz 2.11:

1. Sei $a > 0$ und $b, c \in \mathbb{R}$; dann gilt

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}; \; \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$$

2. Seien $a, b > 0$, $c \in \mathbb{R}$; dann gilt

$$a^c \cdot b^c = (ab)^c; \; \frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$$

3. Sei $a > 0$, $b, c \in \mathbb{R}$; dann gilt

$$\left(a^b\right)^c = a^{bc}$$

Beispiele:

1.

$$2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^7 = 2^{4+3}$$

$$\frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^2 = 2^{5-3}$$

2.

$$2^3 \cdot 3^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$$
$$\frac{2^3}{3^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

3.

$$\left(2^3\right)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2)^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{12} = 2^{3 \cdot 4}$$

Satz 2.12 (Relationen):

1. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > a \geq 1$ gilt:
$$x^b > x^a \geq x$$
für $x > 1$ und
$$x^b < x^a \leq x$$
für $x \in (0, 1)$.
2. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b \leq 1$ gilt:
$$x \geq x^b > x^a$$
für $x > 1$ und
$$x \leq x^b < x^a$$
für $x \in (0, 1)$.

Beispiele:

1. $a = 2, b = 3, x = 4$, dann gilt
$$4^2 = 16 < 4^3 = 64$$
2. $a = 2, b = 3, x = \frac{1}{2}$, dann gilt
$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} < \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$
3. $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, x = 4$, dann gilt
$$4 \geq 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 > \sqrt[3]{4} \approx 1,59$$
4. $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$, dann gilt
$$\frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,71 < \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0,79$$

Hinweis:
Analoge Resultate erhält man für $a, b < 0$ mit
$$x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$$

Beispiel:
$(s_n)_{n=1}^\infty = \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n=1}^\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

was gilt für $\lim_{n \to \infty} s_n$?

1. $\alpha = 0$; $s_n \equiv 1 \to 1$
2. $\alpha > 0$; $s_n \to 0$
3. $\alpha < 0$; $s_n = \frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha}$ wegen $-\alpha > 0$

Definition 2.13:

1. Sei $\alpha > 0$; dann heißt die Funktion $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ mit
$$f(x) := a^x$$
Exponentialfunktion zur Basis a.
2. Sei $a > 0$; dann hat die Gleichung $x = a^y$ eine eindeutige Lösung
$$y = \log_a(x);$$
die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \log_a(x)$ wird Logarithmusfunktion zur Basis a genannt.

2.3 Exponentialfunktion

Bisher
$$f(x) = a^x$$
$$g(x) = \log_a(x) = y \Leftrightarrow x = a^y.$$

Beispiel:

Beobachtung einer Zellteilung über eine Stunde (1h).

Anfangsbestand: s_0
Bestand nach 1h.: s_1
Modellannahme: Die Zahl der Zellen, die sich teilen, ist proportional zur Zeit:

1.Modell: Alle Zellen teilen sich in 1h.
$$s_1 = 2s_0$$

2.Modell: Die Hälfte der Zellen teilen sich in $\frac{1}{2}$h.
$$s_1 = (1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2}) = (1 + \frac{1}{2})^2$$

3.Modell: Ein Drittel der Zellen teilen sich in $\frac{1}{3}$h.

$$s_1 = (1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3}) = (1+\frac{1}{3})^3$$

n.Modell: Der Anteil $\frac{1}{n}$ der Zellen teilen sich in $\frac{1}{n}$h.

$$s_1 = (1+\frac{1}{n})^n$$

Lemma 2.13:
Die Folge

$$(s_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$$

ist konvergent.

Um dieses Lemma zu beweisen, ist zu zeigen, dass s_n sowohl beschränkt als auch monoton wachsend ist. Der Beweis folgt später.

Bezeichnung(Definition:)
$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ nennt man die Eulersche Zahl. e ist eine irrationale Zahl und es gilt $e \approx 2,718...$

Lemma 2.15:

1. Es gilt
$$e^x = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$
2. Trotz Gleichheit der Grenzwerte gilt i.A.
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} \neq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

   Beweis: Für $x = 2$ und $n = 1$ gilt
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 2^2 = 4$$
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 3^1 = 3$$

Zum Beweis von 2.13:

1. Wir zeigen, dass für $n \geq 2$ gilt $\frac{s_n}{s_{n-1}} \geq 1$, d.h. s_n ist monoton wachsend.
wir berechnen
$$\frac{s_n}{s_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{(n+1)^n(n-1)^{n-1}}{n^n n^{n-1}} =$$

$$= \frac{\left(n^2-1\right)^n}{\left(n^2\right)^n}\frac{n}{n-1} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \frac{1}{1-\frac{1}{n}}$$

Abschätzung mit der Bernoullischen Ungleichung ($(1+x)^n \geq 1+nx$) liefert

$$\geq \left(1+n\left(-\frac{1}{n^2}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right) = 1$$

also gilt $\frac{s_n}{s_{n-1}} \geq 1$, für $n \geq 2$.

2. Wir zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3$, d.h. s_n ist beschränkt.

- nach 1. ist s_n monoton wachsend, also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$2 = s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq ... \leq s_n \leq ...$$

- wir berechnen eine obere Schranke für s_n:
  nach dem Binomischen Lehrsatz gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k =$$

$$= 1+\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+...+\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n};$$

für $1 \leq k$ gilt die Abschätzung

$$\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot...\cdot(n-k+1)}{k!n^k} =$$

$$= \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)(n-2)\cdot...\cdot(n-k+1)}{n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot...\cdot\frac{n-k+1}{n}$$

$$\leq \frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot k} \leq \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot ...\cdot 2} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Also gilt

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+...+\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$\leq 1+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+...+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

was nach 1.11 gleich

$$1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

ist. Weiter berechnen wir

$$1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+\frac{1-\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{\frac{1}{2}}=1+2=3$$

also folgt $s_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2.16:
Die Logarithmusfunktion zur Basis e heißt natürlich Logarithmus.

Schreibweise $f(x)=\ln(x)=\log_e(x), x>0$;

es gilt

$$y=\ln(x) \Leftrightarrow x=e^y.$$

Hinweis:
$\ln(x)$ ist die Umkehrfunktion zu e^x, es gilt deshalb

$$\ln(e^x)=x\cdot\ln(e)=x.$$

Hinweis:
Die Log-Funktion lässt sich auch für eine Basis $b>1$ definieren: $f(x)=\log_b(x)$; diese Funktion ist die Umkehrfunktion zu b^x; wichtig sind nur $b=e$ und $b=10$;

Merkregel:

$$\log_b(a)=c \Leftrightarrow a=b^c$$

Spezialfall:

$$\log_e(a):=\ln(e)=c \Leftrightarrow a=e^c$$

neben der Basis e ist die Basis 10 eine Standardbasis

$$\log_{10}(a):=\lg(e)=c \Leftrightarrow a=10^c$$

Umrechnung zwischen verschiedenen Basen, hier z.B. zwischen Basis e und Basis 10:

$$\lg(a)=\lg(e^{\ln(a)}=\ln(a)\cdot\lg(e)$$

Die verschiedenen Umrechnungen ergeben sich aus den Rechenregeln für die log-Funktion:

Satz 2.17
Es seien $x, y > 0$; Dann gelten

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
   $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
2. $\log_a(1) = 0$
   $\log_a(a) = 1$
   $\log_a(\frac{1}{y}) = -\log_a(y)$
3. $a^{\log_a(y)} = y$
   $\log_a(a^x) = x$
4. $\log_a(y^x) = x \cdot \log_a(y)$
5. $\log_a(x) = \log_a(b) \cdot \log_b(x), a, b > 1$
6. für $a > 1$ ist $\log_a(x)$ streng monoton wachsend auf $(0, \infty)$.

Speziell gilt $y^x = e^{\ln(y^x)} = e^{x \cdot \ln(y)}$

2.4 Reihen

Beispiele sind bereits bekannt:

1. Für $x \neq 1$ gilt
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$
   (vergleiche 1.11.4.: geometrische Summenformel)
2. Für $\mid x \mid < 1$ gilt
$$\lim_{n \to \infty} x^n = \lim_{n \to \infty} x^{n+1} = 0$$
   (vergleiche Beispiel nach Definition 2.4); dann gilt
$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}(1 - x^{n+1}) \to \frac{1}{x - 1}$$
3. Schreibweise $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

Definition 2.18:
Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$; mit $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ heißt die Folge $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ (unendliche) Reihe; sie wird mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

Hinweis:
Eine Reihe ist also eine Folge von Partialsummen;

Definition 2.19:
Eine Reihe heißt konvergent genau dann, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert.
Schrebweise: $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$

Satz 2.20 (notwendige Bedingung für Konvergenz)

1. Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist die Folge $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ eine Nullfolge.

   Beweis: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, d.h.

   $$\exists a \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = a$$

   bzw.

   $$\exists a \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} s_n$$

   mit $s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$; es gilt dann

   $$a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = s_n - s_{n-1}$$

   und deshalb

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = a - a = 0$$

2. Die Umkehrung von 1. ist falsch.

Lemma 2.21(Konvergenzbedingung)
Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge.

1. falls $\lim_{k\to\infty} \mid \frac{a_{k+1}}{a_k} \mid < 1$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent (Quotientenkriterium)
2. falls $\lim_{k\to\infty} \mid \frac{a_{k+1}}{a_k} \mid > 1$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.
3. falls $\lim_{k\to\infty} \mid \frac{a_{k+1}}{a_k} \mid > 1$, so ist Konvergenz und Divergenz möglich.

Beispiel:

1. $a_k = \frac{1}{k}$;

   $$\lim_{k\to\infty} \mid \frac{a_{k+1}}{a_k} \mid = \lim_{k\to\infty} \mid \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} \mid = \lim_{k\to\infty} \mid \frac{k}{k+1} \mid = 1.$$

   Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

2. $a_k = \frac{1}{k^2}$;

   $$\lim_{k\to\infty} \mid \frac{a_{k+1}}{a_k} \mid = \lim_{k\to\infty} \mid \frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} \mid = \lim_{k\to\infty} \mid \frac{k^2}{(k+1)^2} \mid = 1.$$

   Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konvergent.

Hinweis:

1. Allgemein gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ ist konvergent für $\alpha > 1$ und divergent für $\alpha \leq 1$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$.
   Konvergenz wegen
$$\mid \frac{a_{k+1}}{a_k} \mid = \frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{\frac{1}{2^k}} = \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} < 1.$$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ ist konvergent.

Zur Unbeschränktheit von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

1. Behauptung: $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} > \frac{n}{2}$, $n = 1, 2, 3$

   Wir beweisen diese Behauptung induktiv:

   $n = 1$: $\sum_{k=1}^{2^1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ ist eine wahre Aussage.

   $n \to n+1$: Die Behauptung gelte für n, wir zeigen, dass sie auch für $n + 1$ gilt:
$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} > \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}.$$
   die zweite Summe hat $2^{n+1} - (2^n + 1) + 1 = 2^n$ Summanden; der kleinste Wer ist $\frac{1}{2^{n+1}}$; deshalb gilt
$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$
   und deshalb für die Gesamtsumme
$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} > \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$
2. Behauptung: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.

   Wir zeigen
$$\forall K > 0 \exists N(K) \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{N(K)} \frac{1}{k} > K$$
   Beweis: Zu $K > 0$ wähle $N(K) = \geq 2^{2K}$; dann gilt nach 1.
$$\sum_{k=1}^{N(K)} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{2^{2K}} \frac{1}{k} > \frac{2K}{2} = K.$$

Kapitel 3

Elementare Funktionen

Wir berachten Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \to f(x)$ oder $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$;

bisher bekannt

- Exponentialfunktion
$$f(x) = a^x$$
$$f(x) = e^x$$
- Logarithmusfunktion
$$f(x) = \log_a(x)$$
$$f(x) = \log_{10}(x) = \lg(x)$$
$$f(x) = \log_e(x) = \ln(x)$$
-
$$f(x) = x^n$$

3.1 Polynome

<u>Definition 3.1:</u>
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt <u>Polynom</u> genau dann, wenn Konstanten $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\ &= a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Konstanten $a_0, a_1, ..., a_n$ heißen <u>Koeffizienten</u> von f; für $a_n \neq 0$ heißt f ein Polynom vom <u>Grad n</u>: $grad(f) = n$.

<u>Beispiele:</u>

1. $f(x) = x^2 + 2x + 1$ hat Grad 2

2. $f(x) = 5 = 5x^0$ hat Grad 0

Definition 3.2
Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome; für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ heißt die Funktion

$$h(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

rationale Funktion.

Beispiel:
$f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x - 1$ ($g(x) \neq 0$ für $x \neq 1$)

$$h(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 1}, x \neq 1$$

Definition 3.3
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom;

1. $a \in \mathbb{R}$ heißt Nullstelle des Polynoms f genau dann, wenn gilt $f(a) = 0$.
2. $a \in \mathbb{R}$ heißt eine r-fache Nullstelle des Polynoms f genau dann, wenn gilt

$$f(x) = g(x) \cdot (x - a)^r$$

   und $g(a) \neq 0$

Beispiele:

1. $f(x) = x^2 + 1$ hat keine Nullstelle.
2. $f(x) = x - 1$ hat die einzige Nullstelle $a = 1$.
3. $f(x) = x^2 - 2x + 1$ hat die zweifache Nullstelle $a = 1$, denn

$$f(x) = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2$$

   und $g(x) \equiv 1$.
4. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ hat die zweifache Nullstelle $a = 1$, denn

$$f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1) = (x^2 + 1)(x - 1)^2 := g(x) \cdot (x - 1)^2$$

Hinweis:

1. Ein Polynom f hat höchstens $grad(f)$ Nullstellen in $\mathbb{R}$.
2. Ein Polynom f hat genau $grad(f)$ Nullstellen in $\mathbb{C}$ (Menge der komplexen Zahlen).

3.2 Trigonometrische Funktionen

Definition 3.4:
Für $x \in \mathbb{R}$ sei

1. $\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
2. $\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

für diese Funktionen ist die Zahl $\pi \approx 3,1415...$ (irrational) interessant:

$$\sin(\pi) = 0$$

$$\cos(\pi) = 1.$$

Hinweis:
Im Einheitskreis (Kreis um den Nullpunkt mit Radius $r = 1$) gilt für den Kreisumfang

$$U(r) = 2r\pi = U(1) = 2\pi.$$

Damit lässt sich ein Winkel, gemessen in Grad, umrechnen in das sogenannte Bogenmaß:

Der Winkel $\alpha°$ entsprich dem Bogenmaß $x = \alpha° \frac{\pi}{180°}$ (π ist die Länge des oberen Halbkreises des Einheitskreises; $\alpha = 1°$ entspricht der Bogenlänge $\frac{\pi}{180}$.)

Hinweis:
Die Trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ lassen sich am Einheitskreis darstellen.

Satz 3.5:
Für die Funktionen $\sin(x)$ und $\cos(x)$ gelten für alle $k \in \mathbb{Z}$ die folgenden Eigenschaften:

1. $\sin(x + 2\pi \cdot k) = \sin(x)$
   $\cos(x + 2\pi \cdot k) = \cos(x)$
2. exakte Werte:

   $\sin(k\pi) = 0$
   $\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$
   $\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k$
   $\cos(k\pi) = (-1)^k$
3. $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$
4. $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$
5. Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$$

Ergänzung:

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \,\forall x,\, \cos(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$
$$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \,\forall x,\, \sin(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$$

3.3 Funktionsgrenzwerte

Bisher bekannt: Grenzwert von Folgen

$$a_n \to a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) : \forall n > n(\varepsilon) :\mid a_n - a \mid< \varepsilon$$

Definition 3.6

1. Sei f eine Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$; f hat für $x \to \infty$ den Grenzwert d genau dann, wenn gilt
$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 : \forall x > x_0 :\mid f(x) - d \mid< \varepsilon;$$
Schreibweise: $\lim_{x\to\infty} f(x) = d$ oder $f(x) \to d(x \to \infty)$.
2. Sei f eine Funktion $f : (-\infty, a) \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$; f hat für $x \to -\infty$ den Grenzwert d genau dann, wenn gilt
$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 : \forall x < x_0 :\mid f(x) - d \mid< \varepsilon;$$
Schreibweise: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = d$ oder $f(x) \to d(x \to -\infty)$.
3. Sei f eine Funktion $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$; f hat für $x \to x_0$ den Grenzwert d genau dann, wenn gilt
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mid x - x_0 \mid< \delta, x \neq x_0 :\mid f(x) - d \mid< \varepsilon;$$
Schreibweise: $\lim_{x\to x_0} f(x) = d$ oder $f(x) \to d(x \to x_0)$.

Charakterisierung über Folgen

- Falls $\lim_{x\to x_0} f(x) = d$, dann gilt für alle Folgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ und $x_n \neq x_0$, dass
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = d$$
.
- Falls $\lim_{x\to\infty} f(x) = d$, dann gilt für alle Folgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, dass
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = d$$
.

- Falls $\lim_{x\to-\infty} f(x) = d$, dann gilt für alle Folgen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$, dass
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = d$$
.

Hinweis: (Grenzwert-Regeln)

Aus $\lim_{x\to x_0} f(x) = d$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = c$, $d, c \in \mathbb{R}$ folgt

1. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = d \pm c$
2. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = d \cdot c$
3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{d}{c}$ für $c \neq 0$ und $g(x) \neq 0$.

Die Regeln gelten auch für $x_0 = \pm\infty$, aber weiterhin endlichen c, d.

Beispiele:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot 1}{x^2(1+\frac{3}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{x^2}} = 1$
2. $\lim_{x\to 1} x$; gelte $x_n \to 1$, $x_n \neq 1$; dann folgt
$$f(x_n) = x_n \to 1$$
Beobachtung: $f(1) = 1$.

3.4 Stetigkeit

Idee: Für eine Funktion $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ oder $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt für jedes $x_0 \in (-\infty, \infty)$ oder $x_0 \in [a, b]$:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definition 3.7:

Eine Funktion wie oben heißt stetig in x_0 genau dann, wenn gilt
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : | x - x_0 | < \delta \Rightarrow | f(x) - f(x_0) | < \varepsilon$$

Beispiele:

1. $f(x) = x^2$ ist stetig in $x_0 \forall x_0 \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$ ist in $x_0 = 0$ nicht stetig.
3. $f(x) = e^x$ ist stetig (in jedem Punkt), $f(x) = x$ ist stetig (in jedem Punkt).

Kapitel 4

Differentialrechnung

4.1 Ableitungen 1.Ordnung

Motivation:

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$;
Sekante durch die Punkte $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 + h \\ f(x_0 + h) \end{pmatrix}$.

Anstieg der Sekante:

$$d(x_0, h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Anstieg der Tangente:

$$\lim_{h \to 0} d(x_0, h) =?$$

Notation: $d(x_0, h)$ heißt Differenzenquotient.

Definition 4.1

1. $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in I$ genau dann, wenn gilt
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} d(x_0, h)$$
existiert.
2. $f'(x_0)$ heißt dann Ableitung (1.Ordnung) der Funktion f an der Stelle x_0.
3. f heißt differenzierbar im Intervall I genau dann, wenn f differenzierbar ist für alle $x_0 \in I$.

Lemma 4.2

Ist f an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar, so ist f an der Stelle x_0 stetig. (Umkehrung gilt nicht!)

Beispiele:

1. $f(x) = c$ für eine Konstante c. Dann ist

$$d(x_0, h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0,$$

   also $f'(x) = 0$.

2. $f(x) = x$ dann gilt

$$d(x_0, h) = \frac{x_0 + h - x_0}{h} = \frac{h}{h} = 1,$$

   also $f'(x) = 1$.

3. $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$.

4. $f(x) = \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, denn

$$d(x_0, h) = \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{x_0 - x_0 - h}{(x_0 + h) \cdot x_0} \right) =$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{-h}{x_0^2 + x_0 \cdot h} \right) = \frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot h} \to -\frac{1}{x_0^2} (h \to \infty)$$

Satz 4.4 (Kettenregel)

Sind zwei Funktionen hintereinander geschaltet, d.h.

$$h(x) = (f \circ g)(x) := f(g(x)),$$

dann gilt bei Differenzierbarkeit

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Beispiel:
$f(x) = x^2, g(x) = x + 1 \Rightarrow h(x) = f(g(x)) = (x + 1)^2 \Rightarrow h'(x) = 2(x + 1) \cdot 1$

Satz 4.5: (Ableitung der Umkehrfunktion)

Ist g die mkehrfunktion von f, d.h. es gilt

$$f(g(x)) = x,$$

dann gilt nach der Kettenregel

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 = (x)';$$

deshalb gilt

$$(g(x))' = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Beispiele von Ableitungen:

1. $f(x) = e^x, f'(x) = e^x$

2. $f(x) = a^x, f'(x) = \log(a) \cdot a^x$, denn

$$f(x) = a^x \Rightarrow \ln(f(x)) = \ln(a^x) = x \cdot \ln(a^x)$$

$$\Rightarrow e^{\ln(f(x))} = e^{x \cdot \ln(a)} \Rightarrow f(x) = e^{x \cdot \ln(a)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{x \cdot \ln(a)} \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot e^{\ln(a^x)} = \ln(a) \cdot a^x$$

3. $f(x) = \ln(x), f'(x) = \frac{1}{x}$, denn

$$g(x) = \ln(x),\ f(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = e^{g(x)} = e^{\ln(x)} = x$$

$$\Rightarrow g'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

und $f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$, denn

$$a^{\log_a(x)} = x \Rightarrow \left(a^{\log_a(x)}\right)' = (x)' = 1$$

$$\Rightarrow \ln(a) \cdot a^{\log_a(x)} \cdot (\log_a(x))' = 1$$

$$\Rightarrow \ln(a) \cdot x \cdot (\log_a(x))' = 1 \Rightarrow (\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

4. $f(x) = x^r, f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
5. $f(x) = \sin(x), f'(x) = \cos(x)$
6. $f(x) = \cos(x), f'(x) = -\sin(x)$

Satz 4.6 (l'Hospitalsche Regeln)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar; gilt für $x_0 \in [a, b]$ $g(x_0) = f(x_0) = 0$ und $g(x) \neq 0\ \forall x \neq x_0$, so folgt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beispiele:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$
4. $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\ln((1+x)^{\frac{1}{x}})} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} =$
   $= \lim_{x \to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{\frac{1}{1+x}}{1}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{1+x}} = e^1 = e$

Hinweis:
Unter Ableitungen höherer Ordnung versteht man Ableitungen von Ableitungen, z.b. $f'' = (f')'$, $f''' = (f'')'$ usw.

4.2 Lokale Extrema

Satz 4.7
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ diffbar;

1. Gilt $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$, dann ist f monoton wachsend, d.h.
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$
2. Gilt $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$, dann ist f monoton fallend, d.h.
$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Definition 4.8:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben;

1. $x_0 \in I$ heißt globales Minimum von f auf I genau dann, wenn gilt
$$f(x) \geq f(x_0) \forall x \in I$$
2. $x_0 \in I$ heißt lokales Minimu von f auf I genau dann, wenn gilt
$$\exists \varepsilon > 0 : f(x) \geq f(x_0) \forall x \in I : \mid x - x_0 \mid < \varepsilon$$

Satz 4.9: (notwendige Bedingung)
Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$; ist $x_0 \in (a, b)$ eine Minimumstelle von f auf I, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Satz 4.10:
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal diffbar und f'' stetig; ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, so hat f an der Stelle x_0 ein (lokales) Extremum (Minimum oder Maximum); es gilt
$$f''(x_0) \leq 0$$
bei Maxima und
$$f''(x_0) \geq 0$$
bei Minima.

Beispiele

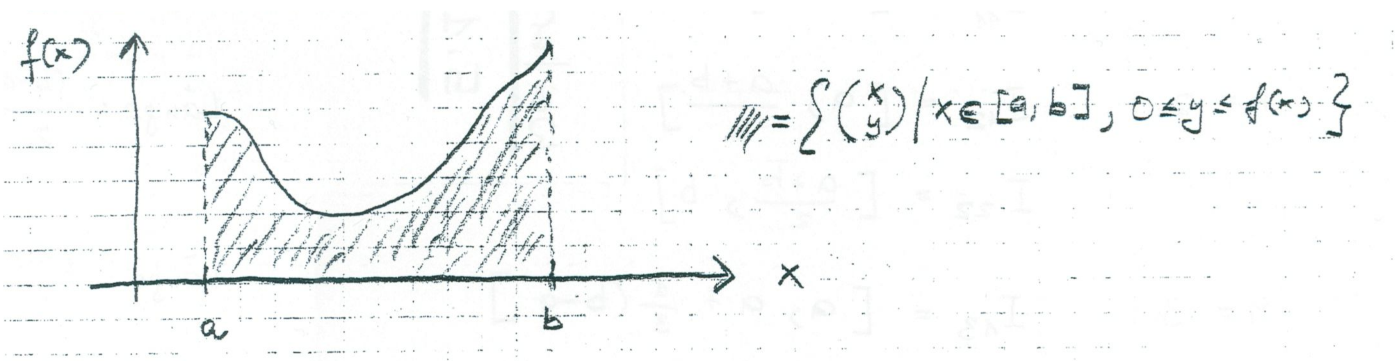
1. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$
$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$
$f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow f''(3) = 12 > 0 \Rightarrow$ Minimum, $f''(-1) = -12 < 0 \Rightarrow$ Maximum.
2. $f(x) = x \cdot e^{-x}$
$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + xe^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(1 - x)$
$f''(x) = (-1)e^{-x}(1 - x) + e^{-x}(-1) = -e^{-x}(2 - x)$
$f'(1) = 0, f''(1) < 0 \Rightarrow$ Maximum.

Kapitel 5

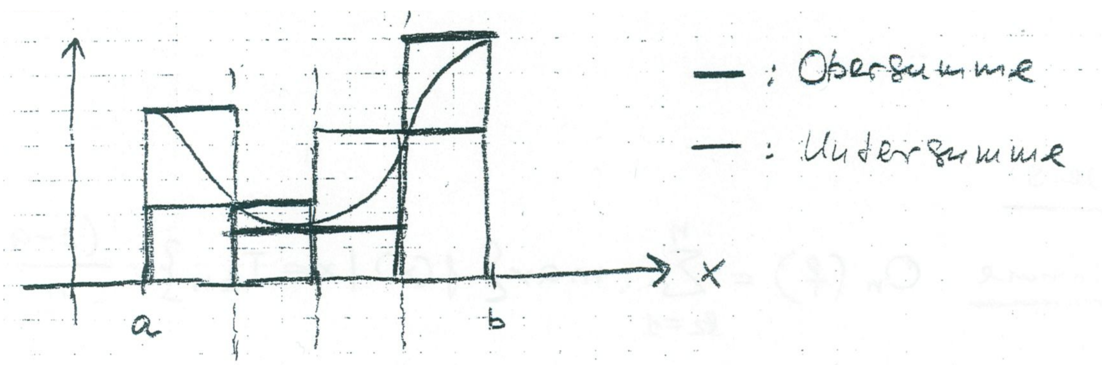
Integralrechnung

5.1 Riemann-Integral

Gegeben: Sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ (also $f(x) \leq 0 \; \forall x \in [a, b]$)
Ziel: Berechnung des Flächeninhalts der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse auf dem Intervall $[a, b]$:



Idee 1: Man schachtelt die Fläche durch eine "Obersumme" und eine "Untersumme" ein:



Idee 2: Macht man die Unterteilung des Intervalls (Definition) immer feiner und haben "Obersumme" und "Untersumme" den gleichen Grenzwert, so heißt dieser Grenzwert das Riemann-Integral von f über $[a, b]$.
Bezeichnung: $\int_a^b f(x)\, dx$. Die Funktion f heißt dann integrierbar.
Hinweis:

<u>Teilintervalle</u> $I_{kn} := \left[a + \frac{k-1}{n}(b-a), a + \frac{k}{n}(b-a)\right], n \in \mathbb{N}, k = 1, \dots, n$

<u>Beispiel</u>

$n = 1: \quad I_{11} = [a, b]$ Länge: $(b-a)$

$n = 2: \quad I_{12} = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ Länge: $\frac{(b-a)}{2}$

$$I_{22} = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

$n = 3: \quad I_{13} = \left[a, a + \frac{1}{3}(a-b)\right]$ Länge: $\frac{(b-a)}{3}$

$$I_{23} = \left[a + \frac{1}{3}(a-b), a + \frac{2}{3}(a-b)\right]$$

$$I_{33} = \left[a + \frac{2}{3}(a-b), b\right]$$

$$\vdots$$

<u>Hinweis:</u>

<u>Obersumme:</u> $O_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \max\{f(x) | x \in I_{kn}\} \cdot \frac{b-a}{n}$

<u>Untersumme:</u> $O_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \min\{f(x) | x \in I_{kn}\} \cdot \frac{b-a}{n}$

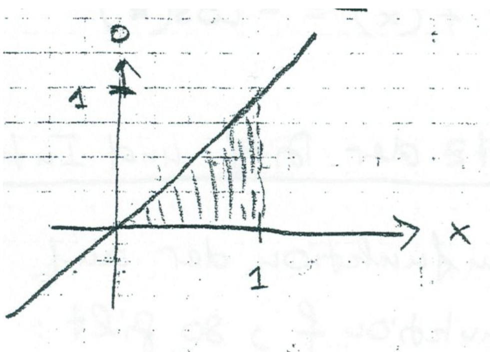
<u>Beispiel:</u>

Sei $f : [0,1] \to (0, \infty)$, $f(x) = x$, $b - a = 1$ und $I_{kn} = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$. Dann gilt

$$O_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \to \frac{1}{2}$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} k - n\right) = \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right)$$
$$= \frac{1}{n^2} \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - \frac{2n}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n}\right) \to \frac{1}{2}$$

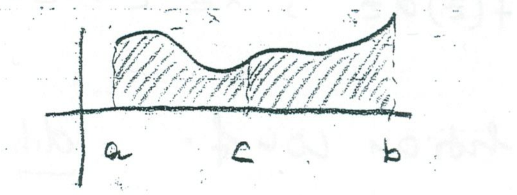
<u>also gilt:</u> $\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$



5.1 Satz

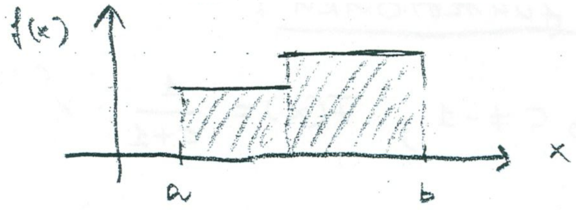
(i) Für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar gilt mit $c \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx;$$



(ii) Ist f stetig, so ist f auf $[a, b]$ integrierbar;

(iii) die Umkehrung von (b) gilt i.A. nicht



5.2 Definition: (Stammfunktion)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; F heißt Stammfunktion von f genau dann, wenn gilt:

$$F' = \underbrace{\frac{d}{dx}F(x)}_{\text{übliche Schreibweise}} = f(x) \forall x \in [a, b]$$

Beispiel:

(i) $f(x) = 2x, \qquad F(x) = x^2$

(ii) $f(x) = 4x^3, \qquad F(x) = x^4$

(iii) $f(x) = \sin(x), \qquad F(x) = -\cos(x)$

5.3 Satz: (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

(i) Ist F eine Stammfunktion der auf $[a, b]$ integrierbaren Funktion f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

(ii) ist f stetig auf $[a, b]$, so ist:

$$F(x) = \int_a^x f(z) dz, \quad x \in [a, b]$$

eine Stammfunktion von f. D.h.: $F'(x) = f(x)$.

5.2 Berechnung von Integralen

Beispiele für Stammfunktionen:

(i) $f(x) = x^c, \quad c \in \mathbb{R}, c \neq -1; \quad F(x) = \frac{1}{c+1} \cdot x^{c+1};$

(ii) $f(x) = \frac{1}{x}; \quad F(x) = {}^e\log(x) = \ln(x)$

(iii) $f(x) = e^{ax}; \quad F(x) = \frac{1}{a}e^{ax}, a \neq 0$

(iv) $f(x) = \sin(x); \quad F(x) = -\cos(x)$

(v) $f(x) = \cos(x); \quad F(x) = \sin(x)$

konkret:

(vi)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \underbrace{-\cos(\frac{\pi}{4})}_{F}(b) - \underbrace{(-\cos(0))}_{F(a)}$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 1$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1$$

(vii) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = {}^e\log(x)\Big|_1^2 = {}^e\log(2) - \underbrace{{}^e\log(1)}_{=0} = {}^e\log(2) = \ln(2)$

5.4 Satz: (Rechenregeln für Integrale)
Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $c \in \mathbb{R}$; dann gilt:

(i) $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$ (Monotonie)

(ii) $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\,dx + int_a^b g(x)\,dx$ (Linearität)
$\displaystyle\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = x \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

5.5 Satz: (partielle Integration)
Seien $f, g : [a, b]$ stetig und differenzierbar; dann gilt:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx$$

Idee:
$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Produktregel)
$\Rightarrow \displaystyle\int_a^b (f(x) \cdot g(x))'\ dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$
$\Rightarrow f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b = \ldots$

Beispiel:

(i) $\displaystyle\int_a^b x \cdot e^x \, dx = e^x \cdot x \Big|_a^b - \int_a^b e^x \cdot 1 \, dx$

$$= e^b \cdot b - e^a \cdot a - e^x \Big|_a^b$$
$$= e^b \cdot b - e^a \cdot a - e^b + e^a;$$

(ii) $\displaystyle\int_a^b \ln(x) \, dx = \int_a^b 1 \cdot ln(x) \, dx$

$$= x \cdot \ln(x) \Big|_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$
$$= b \cdot \ln(b) - a \cdot \ln(a) - b + a$$
$$= (x \cdot \ln(x) - x) \Big|_a^b$$

Beispiel: "schlechte partielle Integration"

$$\int_a^b x \cdot e^x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^x \Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b \frac{1}{2} x^2 \cdot e^x \, dx}_{\text{auch nicht einfacher als } \int x e^x \, dx}$$

5.6 Satz: (Substitution)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, g differenzierbar und g', f seien stetig, dann gilt:

$$\int_a^b f(g(x)) \, g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt.$$

Beispiele

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1 + x^2} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} \cdot 2x \, dx$

also:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = x^2 \\ f(t) = \frac{1}{1+t} \end{array}\right\} \Rightarrow f(g(x)) = \tfrac{1}{1+x^2}$$

und:

$$\int_0^1 \frac{2x}{1 + x^2} \, dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + t} dt = ln(1 + t) \Big|_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2);$$

(ii) $\displaystyle\int_0^2 x^2 \cdot \sin\left(x^3\right) \, dx = \frac{1}{3} \int_0^2 3x^2 \cdot \sin\left(x^3\right) \, dx$

also:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = x^3, g'(x) = 3x^2 \\ f(t) = \sin(t) \end{array}\right\} \Rightarrow f(g(x)) = \sin\left(x^3\right)$$

und

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 x^2 \cdot \sin\left(x^3\right)\, dx &= \frac{1}{3}\int_0^2 3x^2 \cdot \sin\left(x^3\right) dx \\
&= \int_0^8 \sin(t)\, dt = -\cos(t)\Big|_0^8 = -\cos(8) + \cos(0) \\
&= -\cos(8) + 1.
\end{aligned}
$$

5.3 Uneigentliche Integrale

5.7 Definition: (uneigentliches Integral)

(i) Sei $f : [a,n) \to \mathbb{R}$ und sei f für alle $T \in [a,b)$ auf $[a,T]$ integrierbar, dann versteht man als uneigentliches Integral $\int_a^b f(x)\ dx$ den Ausdruck

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{T\to b} \int_a^T f(x)\, dx,$$

falls der Grenzwert existiert.

(ii) Die Definition gilt sinngemäß für $T \to a$.

Beispiele:

(i)
$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx &= \lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^T\right) \\
&= \lim_{T\to\infty}\left(\frac{-1}{T} + 1\right) = 1
\end{aligned}
$$

(ii)
$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx &= \lim_{T\to 0} \int_T^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{T\to 0}\left(2x^{\frac{1}{2}}\Big|_T^1\right) \\
&= \lim_{T\to 0}\left(2 - 2\sqrt{T}\right) = 2.
\end{aligned}
$$

Kapitel 6

Lineare Algebra

6.1 Matrizen

Idee: Einfache Beschreibung von Gleichungen der Form

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Koeffizienten bilden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

Definition 6.1

Ein Zahlenschema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j=1}^{m}$$

heißt Matrix mit m Zeilen und n Spalten

Schreibweise: $(m \times n)$-Matrix Die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen wird mit $\mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet.

Bemerkung

1. Eine $(m \times 1)$ Matrix heißt Spaltenvektor
2. eine $(1 \times n)$ Matrix heißt Zeilenvektor

3. $\begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$ heißt Nullmatrix (jeder Eintrag ist 0).

4. $I_n = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 0 \\ . & 1 & & & . \\ . & & 1 & & . \\ . & & & 1 & . \\ 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$ heißt Einheitsmatrix (auf der Diagonalen 1, sonst 0, quadratische Matrix).

<u>Definition 6.2</u> (Rechenoperationen für Matrizen)

1. $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}, A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij})$
$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$$
2. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, A = (a_{ij}), c \in \mathbb{R}$
$$c \cdot A = (c \cdot a_{ij})$$
3. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, A = (a_{ij})$,$B \in \mathbb{R}^{n \times p}, B = (b_{ij})$
$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$
4. $A^T = (a_{ji})_{j=1,\dots,n;i=1,\dots,m}$ heißt die zu A <u>transponierte Matrix</u>

<u>Beispiele</u>
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

- $A + B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}$

<u>Bemerkung</u>
Falls $A \cdot B$ existiert so muss $B \cdot A$ nicht existieren; die Matrizen müssen zueinander passen! I.A. gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$.

<u>Beispiel</u>

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix},$$

   aber $B \cdot A$ existiert nicht!

2. die Matrizen $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ heißen <u>gleich</u> genau dann, wenn $(a_{ij}) = (b_{ij})$ für alle i, j. Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 28 & 11 \\ 26 & 7 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 24 & 21 \end{pmatrix} = B \cdot A.$$

<u>Satz 6.3</u>(Rechenregeln)

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $(A + B)C = AC + BC$, $A(B + C) = AB + AC$
3. $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \Rightarrow I_m A = A = A I_n$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

6.2 Lineare Gleichungssysteme

<u>Definition 6.4</u>

Ein System der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &. \\ &. \\ &. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

heißt <u>lineares Gleichungssystem</u> (LGS). Mit $A = (a_{ij})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$ lässt sich ein LGS als Matrixgleichung $Ax = b$ schreiben.

<u>Definition 6.5</u>

Die Menge der Spaltenvektoren $\left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} : Ax = b \right\}$ heißt <u>Lösungsmenge</u> des LGS $Ax = b$.

Zur Lösung eines LGS

Folgende Umformungen eines LGS sind möglich, ohne dass sich ihre Lösungsmenge verändert.

1. Vertauschen zweier Zeilen
2. Multiplikation einer Zeile mit einer reellen Zahl $c \neq 0$
3. Addition eines Vielfachen einer Zeile u einer anderen Zeile

Ziel der Umformungen ist es, das LGS in Stufenform zu überführen (Gauß-Algorithmus):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ . & . & 1 & * \\ . & 0 & . & 1 \\ . & & & 0 \\ 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ . \\ . \\ . \\ \tilde{b}_m \end{pmatrix}}_{\tilde{b}}$$

Es gilt $Ax = b \Longleftrightarrow \tilde{A}x = \tilde{b}$.

6.3 Die Inverse Matrix

Ziel: Löse LGS $Ax = b$ nach x auf.

Definition 6.6
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt invertierbar genau dann, wenn es $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt mit der Eigenschaft $AB = I_n$. $B = A^{-1}$ heißt Inverse von A.

Bemerkung

1. Nicht jede Matrix ist invertierbar
2. existiert A^{-1}, so ist A^{-1} eindeutig und es gilt $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Satz 6.7
Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, dann gilt

1. A^T ist invertierbar und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
2. AB ist invertierbar und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$