Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2015/2016
14.10.2015
Blatt 01

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Zu Bearbeiten bis Mittwoch, den 21.10.2015, 12:00h)

Jeweils zwei Personen sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bitte beide Namen leserlich auf die erste Seite der Lösungen schreiben und mehrere Blätter zusammenheften bzw. tackern. Die Abgabe erfolgt am Mittwoch, den 21.10.2015, 12:00h vor dem Hörsaal in dem die Übungen stattfinden.

1. Gegeben sind folgende Mengen:

$$
\begin{aligned}
M_1 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{1}{2} \le x^2 + y^2 \le 1\right\} \\
M_2 &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 1, |x| + |y| \le 1\right\} \\
P_1 &:= \left\{n \in \mathbb{N} : n \text{ Primzahl }, n < 11\right\} \\
P_2 &:= \left\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, o, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega\right\}
\end{aligned}
$$

   (a) Skizziere die Mengen M_1 und M_2 in einem kartesischen Koordinatensystem.
   (b) Skizziere die Menge $(M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$ in einem kartesischen Koordinatensystem.
   (c) Liste die Elemente von P_1 auf.
   (d) Liste alle Teilmengen der Menge $P_3 := \{x \in P_2 : \text{Name von } x \text{ besteht aus zwei Buchstaben}\}$ auf.
   (e) Liste alle Elemente der Menge $\{(p_1, p_2) \in P_1 \times P_3 : p_1 \ge 4\}$ auf.
   (f) Es sei $M_1^c := [-1,1]^2 \setminus M_1$. Beschreibe die Menge $(M_1^c \times M_2) \cap (M_2 \times M_1^c)$ formal (und so knapp wie möglich).

(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

2. Sei M eine Menge, $M_1 \subset M$ und $M_2 \subset M$. Zeige, dass dann stets

$$(M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1) = (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$$

   gilt.

(2 Punkte)

3. Zeige folgende Behauptungen (etwa mittels vollständiger Induktion):

   (a) $\forall n \in \mathbb{N} : \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$
   (c) $\forall m \in \mathbb{N} : \dfrac{m^3 - m}{6} \in \mathbb{N}_0$

(2,5 + 2,5 + 2,5 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

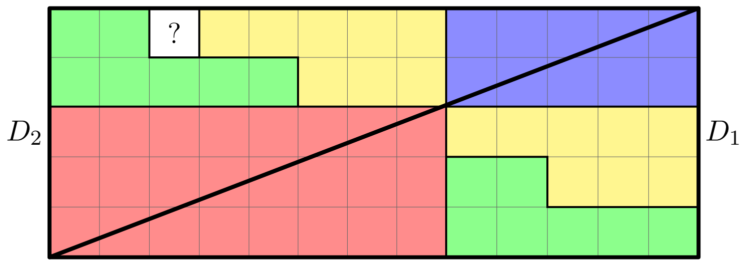
4. Finde den Fehler in folgendem Induktionsbeweis.

   Behauptung: Alle Gerichte in der Mensa schmecken gleich.
   Beweis: Idealisierend gehen wir von einer Mensa aus, die beliebig viele verschiedene Gerichte anbieten kann. Wir bezeichnen die verschiedenen Gerichte mit $G_1, G_2, \ldots, G_n$ (wobei $n \in \mathbb{N}$).

   - Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen.
   - Induktionshypothese: Nun sei die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr.
   - Induktionsschritt: Wir betrachten die Gerichte $G_1, \ldots, G_{n+1}$. Gemäß der Induktionshypothese schmecken die Gerichte $G_1, \ldots, G_n$ gleich. Ebenso schmecken die Gerichte $G_2, \ldots, G_{n+1}$ gleich, da es sich um n Gerichte handelt. Damit haben insbesondere die Gerichte G_{n+1} und G_n denselben Geschmack. Also ist der Geschmack aller $n + 1$ Gerichte identisch.

(2 Punkte)

5. Die beiden Dreiecke D_1 und D_2 haben offensichtlich dieselbe Fläche. Dennoch wird D_1 von den farbigen Polyedern ausgefüllt, bei D_2 bleibt ein Feld frei. Wie kann das sein?



(2,5 Punkte)