Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2015/2016
21.10.2015
Blatt 02

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Zu Bearbeiten bis Mittwoch, den 28.10.2015, 12:00h)

1. Gib die Lösungsmengen der folgenden reellen Ungleichungen (sofern möglich) als Vereinigung von Intervallen an.

   (a) $x - 2 \leq 1$

   (b) $|3 - x| > 2$

   (c) $|x + 2| - 1 < |x + 3|$

   (d) $|x + 3| \cdot |x - 2| \leq 2$

   (e) $\frac{10}{-x^2-3} \geq (x^2 - 3)$

(1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

2. (a) Berechne folgende Binomialkoeffizienten, sofern sie definiert sind, oder begründe, weshalb sie nicht definiert sind:

$$\binom{5}{9}, \binom{-9}{5}, \binom{2{,}5}{4}, \binom{4}{2{,}5}, \binom{-\frac{5}{2}}{4}, \binom{5}{-4}, \binom{10^{1010}}{10^{1010}-1}, \binom{49}{6}$$

   Gib bei jeder Berechnung mindestens einen Zwischenschritt an.

   (b) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Zeige die Gültigkeit folgender Gleichungen oder widerlege sie durch ein Gegenbeispiel:

$$\binom{\alpha}{n} - \binom{\alpha - 1}{n - 1} = \binom{\alpha - 1}{n},$$

$$\binom{-1}{n} = (-1)^n,$$

$$2^n - 1 = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \right)$$

(4 + (2 + 1 + 2) Punkte)

3. Entscheide jeweils, ob die folgenden Funktionen injektiv oder surjektiv sind (oder ob sie beide oder keine der beiden Eigenschaften aufweisen). Begründe jede Entscheidung.

   (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x - 4$,

   (b) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(z) = 2z + 3$,

   (c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$,

   (d) $f\colon \mathbb{R} \to (0, 1]$ mit $f(x) = \frac{3}{x^2+3}$.

(1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Es seien M_1, M_2, M_3 Mengen und $f\colon M_1 \to M_2$, $g\colon M_2 \to M_3$ Funktionen. Beweise die folgenden Aussagen:

   (a) Falls f und g injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv. (Die Verkettung zweier injektiver Funktionen ist injektiv.)

   (b) Falls f und g surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv. (Die Verkettung zweier surjektiver Funktionen ist surjektiv.)

(2 + 2 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben.