

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe spätestens am Mittwoch, den 11.11.2015, 12:00h)

1. Gehe bei der Herleitung der Umkehrfunktionen in den folgenden Teilaufgaben wie bei der Herleitung von Arsinh in der Vorlesung vor.
 - (a) Leite die Umkehrfunktion von $\cosh : [0, \infty) \rightarrow D_{\text{Arcosh}}$, sowie ihren Definitionsbereich D_{Arcosh} her.
 - (b) Leite die Umkehrfunktion von $\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow D_{\text{Arcoth}}$, sowie ihren Definitionsbereich D_{Arcoth} her.
 - (c) Zeige, dass es sich bei den in Aufgabenteil (a) und (b) bestimmten Funktionen tatsächlich um die Umkehrfunktionen handelt. Überprüfe also jeweils, ob $f \circ f^{-1} \equiv \text{Id}$ und $f^{-1} \circ f \equiv \text{Id}$ gilt (für $f \equiv \text{Arcosh}$ bzw. $f \equiv \text{Arcoth}$).
 - (d) Bestimme jeweils die Ableitung der in Aufgabenteil (a) und (b) bestimmten Funktionen.

(2 + 2 + 4 + 2 Punkte)

2. Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$$

gilt. Wie in der Vorlesung wird hier die Schreibweise $\cos^3(x) := (\cos(x))^3$ verwendet.

(2 Punkte)

3. (a) Bestimme $\frac{d}{dx} \arctan(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Bestimme $\frac{d}{dx} \arccos(x)$ für $x \in (-1, 1)$.

(2 + 2 Punkte)

4. (a) Zeige mittels vollständiger Induktion, dass $\cos(k\pi) = (-1)^k$ für $k \in \mathbb{Z}$ gilt.
- (b) Verwende Teilaufgabe (a) um zu zeigen, dass

$$\sin(x + k\pi) = \begin{cases} \sin(x) & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -\sin(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

(3 + 2 Punkte)

Eine weitere Aufgabe befindet sich auf der nächsten Seite.

5. Zeige, dass

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

für alle $x \in [-1, 1]$ gilt.

Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass \cos auf $[0, \pi]$ und \sin auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ bijektiv ist.

(3 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

<https://www.uni-ulm.de/?id=70571>