Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2015/2016
11.11.2015
Blatt 05

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe spätestens am Mittwoch, den 18.11.2015, 12:00h)

1. Berechne die folgenden Integrale:
   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \sum_{k=2}^{9} \frac{x^k}{k-1}$, bestimme $f^{(17)}\big(2^{\frac{1}{3}}\big)$ und $\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ für $x \in \mathbb{R}$.
   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$, bestimme $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_a^{-1} f^{(3)}(x)\,\mathrm{d}x$ (für $a \in \mathbb{R}$).
   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(y) := \frac{y}{1+y^4}$, bestimme $\int f(y)\,\mathrm{d}y$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\big(\int_{-y}^{y} f(x)\,\mathrm{d}x\big)$.
   (d) $\int \big(\cos(2\varphi)\big)^2\,\mathrm{d}\varphi$.
   (e) $\int_{-2}^{2} \sqrt{5-x^2}\,\mathrm{d}x$.

   Gib jeweils mindestens einen Zwischenschritt an und kennzeichne partielle Integration sowie Substitution.

   Hinweis: Bei einem Integral der Form $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ (sog. *unbestimmtes Integral*), soll eine Stammfunktion von $f(x)$ bestimmt werden.

(2 + 3 + 3 + 2 + 3 Punkte)

2. (a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := -2x^4 + 3x^3 - 6x + 5$, bestimme jeweils das zweite, vierte und fünfte Taylorpolynom von f in $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$.
   (b) Bestimme das vierte Taylorpolynom der Sinusfunktion in $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Zeige dann, dass das $(2n+1)$-te Taylerpolynom des Sinus in $x_0 = \frac{\pi}{4}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ in der Form

$$T_{2n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \big(x - \frac{\pi}{4}\big)^{2k}}{(2k+1)!} \Big(2k + 1 + x - \frac{\pi}{4}\Big)$$

   dargestellt werden kann.

(3 + 3 Punkte)

3. Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien jeweils beliebig oft stetig differenzierbar. Außerdem sei die Abbildung $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := f(x)g(x)$ definiert. Zeige durch vollständige Induktion, dass dann

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

   für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(3 Punkte)

Eine weitere Aufgabe befindet sich auf der nächsten Seite.

4. Es sei $a > 0$ und $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a, a]$. Zeige, dass dann

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

gilt.

(2 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

https://www.uni-ulm.de/?id=70571