

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe spätestens am Mittwoch, den 25.11.2015, 12:00h)

1. Gegeben sind die folgenden komplexen Zahlen.

$$z_1 := -3 + 2i, \quad z_2 := \sqrt{3} + \frac{i}{2}, \quad z_3 := e^{\frac{4}{3}\pi i}, \quad z_4 := ie, \quad z_5 := \pi e^{-4\pi i}.$$

- (a) Berechne $\bar{z}_i$ und $|z_i|$ für alle $i \in \{1, \dots, 5\}$.
- (b) Bestimme $\operatorname{Re}(z_i^{-1})$ und $\operatorname{Im}(z_i^{-1})$ für alle $i \in \{1, \dots, 5\}$.
- (c) Bestimme $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $\frac{z_1}{z_2} = a + ib$ gilt.
- (d) Bestimme $r \geq 0$ und $\theta \in (-\pi, \pi]$, so dass $z_2 z_3 = r e^{i\theta}$ gilt.
- (e) Bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^5 = z_1$.

(4 + 4 + 2 + 2 + 2 Punkte)

2. (a) Es sei $x \in \mathbb{C}$, so dass $x^3 - x^2 - 7x + 15 \neq 0$ gilt. Kürze den folgenden Bruch so weit wie möglich:

$$\frac{(x^2 - 2x + 1 + 2i)(x + 3)}{x^3 - x^2 - 7x + 15}.$$

Verwende dazu das Hornerschema.

- (b) Seien $x, z \in \mathbb{C}$ und

$$(x - z)(x - \bar{z}) = ax^2 + bx + c.$$

Zeige, dass dann immer $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt.

(2 + 2 Punkte)

3. Es sei $r > 0$, $\theta \in (-\pi, \pi]$ und $z := r e^{i\theta}$. Außerdem sei $\varphi \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi = \begin{cases} \pi & \text{falls } z \in \mathbb{R}, z < 0 \\ 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z) + |z|}\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

gegeben.

- (a) Bearbeite mindestens eine der folgenden Aufgaben:

- i. Zeige, dass $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)+1} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ für alle $\alpha \in (-\pi, \pi)$ gilt.
- ii. Zeige, dass $\tan(\varphi) = \tan(\theta)$ für $\theta \in (-\pi, 0] \setminus \{-\frac{\pi}{2}\}$ gilt. Zeige dann, dass $\tan(\varphi) = \tan(\theta)$ auch für $\theta \in (0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ gilt.

- (b) Zeige, dass $\varphi = \theta$ für alle $\theta \in (-\pi, \pi]$ gilt.

Hinweis: Evtl. sind die Additionstheoreme für $\sin$, $\cos$ und $\tan$ aus der Vorlesung hilfreich.

(3 + 3 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.

<https://www.uni-ulm.de/?id=70571>