Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2015/2016
09.12.2015
Blatt 9

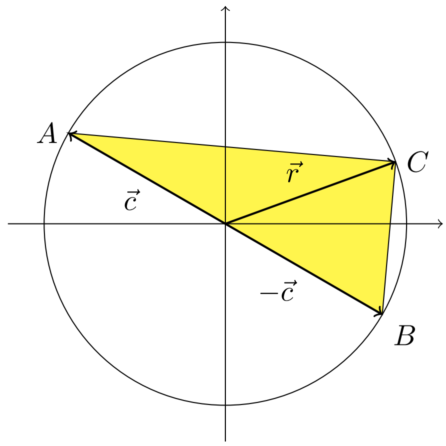
Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe am Mittwoch, den 16.12.2015, 12:00h vor dem Klinikhörsaal)

1. Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Zeige, dass $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$ gilt.
   (b) Zeige, dass $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = 0$ gilt.
   (c) Formuliere eine Bedingung (die ohne das Vektorprodukt auskommt), die äquivalent zur Assioziativität des Vektorprodukts ist. Es soll also $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ genau dann gelten, wenn die Bedingung gilt.
   (d) Finde ein Beispiel für drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, für die $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ gilt.

   (3 + 3 + 3 + 3 Punkte)

2. Es sei $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor in der Ebene. Der Vektor $\vec{r}$ sei ein Vektor auf dem Kreis um den Ursprung mit Radius $|\vec{c}|$, der nicht parallel zu $\vec{c}$ ist. Beweise den Satz von Thales. Zeige also, dass das Dreieck mit den Ecken A, B und C ein rechtwinkliges Dreieck ist (vergl. Skizze).



   Hinweis: Es genügt zu zeigen, dass die Vektoren, die die beiden kürzeren Seiten bilden, senkrecht zueinander sind.

   (3 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

3. (a) Es sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{a} \neq 0$. Zeige folgende Behauptungen:
   - Es existiert ein Vektor $\vec{a}^\perp \neq 0$ mit $\vec{a} \cdot \vec{a}^\perp = 0$.
   - Sei $\vec{a}^\perp$ solch ein Vektor. Für alle $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ existiert dann ein $\lambda_b \in \mathbb{R}$ mit $\vec{b} = \lambda_b \vec{a}^\perp$.

   (b) Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{b} \neq 0$. Außerdem sei $\vec{b}^\perp \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{b} \cdot \vec{b}^\perp = 0$ und $\vec{b}^\perp \neq 0$. Zeige, dass die beiden Geraden

$$M_1 := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{b} \right\}$$
$$M_2 := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \vec{x} \cdot \vec{b}^\perp = \vec{a} \cdot \vec{b}^\perp \right\}$$

   übereinstimmen.

   (c) Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, so dass $\vec{b} \times \vec{c} \neq 0$. Zeige, dass dann die beiden Ebenen

$$M_1 := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{b} + \mu \vec{c} \right\}$$
$$M_2 := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{x} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \right\}$$

   übereinstimmen.
   Folgende Aussage darf ohne Beweis verwendet werden: Es seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{v} \times \vec{w} \neq 0$. Dann gilt:

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{x} = 0 \text{ existieren } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{x} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}.$$

   Falls etwa $v_2 w_3 - v_3 w_2 = (\vec{v} \times \vec{w})_1 \neq 0$, dann gilt $\vec{x} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$ mit

$$\lambda := \frac{w_3 x_2 - w_2 x_3}{v_2 w_3 - v_3 w_2}, \quad \mu := \frac{v_2 x_3 - v_3 x_2}{v_2 w_3 - v_3 w_2}$$

   Auch in den anderen Fällen können λ und μ analog berechnet werden.

   Hinweis: Wie üblich zeigt man $M_1 = M_2$ durch $M_1 \subset M_2$ und $M_1 \supset M_2$.

(3 + 3 + 3 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.