Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2015/2016
16.12.2015
Blatt 10

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe am Mittwoch, den 23.12.2015, 12:00h vor dem Klinikhörsaal)

1. Wir betrachten die Kurve

$$\vec{x}_S : [0,a] \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{x}_S(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ -t\sin(t) \end{pmatrix}$$

für ein $a > 0$. Es sei $L_S(a)$ die Länge der Kurve $\vec{x}_S$ für einen gegebenen Wert $a > 0$.

(a) Skizziere die Kurve $\vec{x}_S$ für $a = 2\pi$ und $a = 4\pi$.

(b) Zeige, dass
$$\cosh\big(\operatorname{arsinh}(x)\big) = \sqrt{1+x^2}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(c) Bestimme $L_S(a)$ für $a > 0$.

(d) Es sei $r > 0$. Gib eine Kurve $\vec{x}_K : [0,a] \to \mathbb{R}^2$ an, die auf dem Kreis um den Ursprung mit Radius r (gegen den Uhrzeigersinn) verläuft. Es gelte also $|\vec{x}_K(t)| = r$ für alle $t \in [0,a]$. Dabei soll der Winkel zwischen dem Vektor $\binom{1}{0}$ und $\vec{x}_K(t)$ gerade t sein (oder $t - 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{N}$, falls $t > 2\pi$).

(e) Es sei $L_K(a)$ die Länge der Kurve $\vec{x}_K$ für einen gegebenen Wert $a > 0$. Bestimme $L_K(a)$.

(f) Es sei $r = 2\pi$, ist dann $L_S(2\pi)$ kleiner als $L_K(2\pi)$? Wie sieht es mit $L_S(4\pi)$ und $L_K(2\pi)$ für $r = 4\pi$ aus?

(1 + 2 + 4 + 2 + 1 + 1 Punkte)

2. Gegeben ist die folgende Menge spezieller Matrizen:

$$\mathcal{M} := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \exists \varphi \in (-\pi,\pi] \text{ mit } A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \right\}.$$

Es seien $A, B \in \mathcal{M}$.

(a) Zeige, dass dann $AB = BA$ gilt.

(b) Zeige, dass $A^\top = A^{-1}$ gilt. Es darf vorausgesetzt werden, dass A invertierbar ist.

(2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

3. Zeige folgende Rechenregeln:

   (a) Für $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) = \vec{c} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gilt $\operatorname{rot} f(x,y,z) = 2\vec{c}$ für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$.

   (b) Für $F, G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt

   $$\operatorname{div}\big(F(x,y,z) \times G(x,y,z)\big) = G(x,y,z) \cdot \operatorname{rot} F(x,y,z) - F(x,y,z) \cdot \operatorname{rot} G(x,y,z)$$

   für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$.

   (c) Für $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $H\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gilt

   $$\begin{aligned} \operatorname{div}\big(H(x,y,z)F(x,y,z)\big) &= H(x,y,z)\operatorname{div} F(x,y,z) + F(x,y,z) \cdot \operatorname{grad} H(x,y,z) \\ \operatorname{rot}\big(H(x,y,z)F(x,y,z)\big) &= H(x,y,z)\operatorname{rot} F(x,y,z) - F(x,y,z) \times \operatorname{grad} H(x,y,z) \end{aligned}$$

   für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$.

   Hier wird vorausgesetzt, dass die auftretenden Ausdrücke definiert sind. Insbesondere sind alle Funktionen partiell differenzierbar.

(2 + 3 + 4 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.