Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2015/2016
23.12.2015
Blatt 11

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe spätestens am Mittwoch, den 13.01.2016, 12:00h)

1. Bestimme die Lösungsgesamtheiten folgender linearer Gleichungssysteme.

   (a) $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 - 3 &= 5x_2 \\ x_3 + 8x_1 &= 9x_2 + 7 \\ -21 + 3x_1 &= x_3 + 2x_2 \end{aligned}$$

   (b) $$\begin{aligned} -2\alpha + \beta - \delta &= -4 \\ -9\alpha + 7\beta + 5\gamma + 3\delta &= -3 \\ 7\alpha - 3\beta + \gamma + 5\delta &= 17 \\ -2\alpha + 5\beta + 8\gamma + 11\delta &= 20 \end{aligned}$$

   (c) $5u + 4v - 3w + 2s = 1$

(2 + 3 + 2 Punkte)

2. Gegeben sind die Matrizen A und B mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Zeige, dass genau eine der beiden Matrizen invertierbar ist und bestimme ihre Inverse.

(2 + 2 Punkte)

3. Zeige, dass weder $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ noch $(\mathbb{R}^3, \times)$ eine Gruppe ist.

(2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit der üblichen Addition und der Multiplikation $\circ$, die durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Zeige, dass dann $(\mathbb{R}^2, +, \circ)$ ein Körper ist. Bestimme insbesondere das neutrale Element der Multiplikation $\circ$.

(6 Punkte)

5. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige die Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen:

   (a) Für alle $a, b \in K$ gilt $a < b$ genau dann, wenn $-a > -b$ gilt.

   (b) Es seien $a, b, c \in K$, dann gilt $a < b$ und $c < 0 \Longrightarrow ac > bc$.

   (c) Für alle $a \in K \setminus \{0\}$ gilt $0 < a \cdot a$. (Wir schreiben dann auch $a^2 := a \cdot a$.)

   Verwende dazu lediglich die Köperaxiome, die Rechenregeln für Körper und die Anordnungsaxiome. Gib bei jedem Schritt des Beweises an, welches Axiom (oder Rechenregel oder vorherige Teilaufgabe) verwendet wurde.

(1 + 2 + 2 Punkte)

6. Skizziere die Kurve $\vec{x} : [0, 7] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{x}(t) = \begin{cases} \binom{t}{t} & \text{falls } t \in [0, 1) \\ \binom{2-t}{1} & \text{falls } t \in [1, 2) \\ \binom{t-2}{3-t} & \text{falls } t \in [2, 3) \\ \binom{1}{t-3} & \text{falls } t \in [3, 4) \\ \begin{pmatrix} 5-t \\ \frac{1}{2}(3-|9-2t|) \end{pmatrix} & \text{falls } t \in [4, 5) \\ \binom{0}{6-t} & \text{falls } t \in [5, 6) \\ \binom{t-6}{0} & \text{falls } t \in [6, 7] \end{cases}$$

(0 Punkte)

Wir wünschen allen eine entspannte vorlesungsfreie Zeit und einen guten Start ins neue Jahr.

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.