Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2015/2016
13.01.2016
Blatt 12

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe spätestens am Mittwoch, den 20.01.2016, 12:00h)

1. Es seien $a, b \in \mathbb{C}$, so dass $|a - b| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt. Zeige, dass daraus $a = b$ folgt.

(2 Punkte)

2. Wir betrachten die konvergenten Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n =: a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n =: b \in \mathbb{R}$. Zusätzlich gelte

$$|a_n - b_n| \leq \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass dann $a = b$ gilt.

(b) Finde ein Beispiel für solche Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n \neq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (und zeige, dass die Folgen die Voraussetzungen erfüllen).

(3 + 1 Punkte)

3. Es sei $a \in \mathbb{C}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ und $c \in (0, \infty)$. Außerdem gelte

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \ \exists \tilde{n}_0(\tilde{\varepsilon}) \in \mathbb{N} \ \forall n \geq \tilde{n}_0(\tilde{\varepsilon}) : |a_n - a| < c\tilde{\varepsilon}.$$

Zeige, dass dann $a_n \to a$ für $n \to \infty$ gilt.

(3 Punkte)

4. Bestimme (sofern sie existieren) Infimum und Supremum folgender Mengen:

(a) $\mathcal{M}_a \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n+1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\right\}$

(b) $\mathcal{M}_b \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n+1}{m} \text{ für } n, m \in \mathbb{N}\right\}$

Gib jeweils an, ob es sich um ein Maximum oder Minimum handelt und begründe Deine Aussage.

(2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

5. Finde jeweils ein Beispiel für divergente reelle Folgen $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, so dass

   (a) die Folge $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

   (b) die Folge $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ divergiert.

   (c) die Folge $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

   (d) die Folge $(a_n b_n)_{n=1}^{\infty}$ divergiert.

   Zeige jeweils, dass die Folgen die geforderte Eigenschaft besitzen.

(1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

6. Bestimme den Grenzwert der folgenden Folgen, sofern er existiert. Begründe andernfalls, weshalb er nicht existiert.

   (a) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n \coloneqq \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

   (b) $(a_{2n})_{n=1}^{\infty}$ mit a_n wie in (a).

   (c) $(b_n)_{n=5}^{\infty}$ mit

$$b_n \coloneqq (-1)^n \exp(-2n) + \frac{a_n}{\frac{n\pi}{2}}$$

   und a_n wie in (a).

(2 + 2 + 3 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.