Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2015/2016
20.01.2016
Blatt 13

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe spätestens am Mittwoch, den 27.01.2016, 12:00h)

1. Bestimme, welche der folgenden Reihen konvergieren und ob es sich um absolute Konvergenz handelt. Begründe jeweils Deine Aussage.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{i\pi k}{2}\right)$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\exp\left(-\frac{\pi k}{2}\right)\right)^k$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\mathrm{e}}{\log(k)}$

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\log\left(\sqrt{k}\right)}{k}\right)^k$

   (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{4+k}\right)^{2k}$

   (1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

2. Bestimme für folgende Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jeweils $\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$. Gib außerdem an, ob die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert und begründe dies.

   (a) $a_k := \begin{cases} 2^{-k} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 3^{-k} & \text{sonst.} \end{cases}$

   (b) $a_k := \dfrac{k}{k^2+1}$.

   (2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

3. Betrachte $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, wobei $c_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ wie beim Cauchy-Produkt von absolut konvergenten Reihen gilt.

   (a) Es sei

   $$a_k := \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} =: b_k$$

   für $k \in \mathbb{N}$ und $a_0 := 0 =: b_0$. Zeige dass dann $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren, aber nicht absolut. Zeige außerdem, dass $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ divergiert.

   (b) Es sei $a_k := 3^k, b_k := 2^k$ für $k \in \mathbb{N}$ und $a_0 := 3$ sowie $b_0 := -2$. Zeige, dass dann $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergieren. Zeige außerdem, dass $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert.

   Hinweis: Zeige bei (a) zunächst, dass $\frac{1}{\sqrt{j(k-j)}} \geq \frac{2}{k}$ für alle $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ gilt.

(3 + 3 Punkte)

4. Bestimme jeweils den Konvergenzradius R der folgenden Potenzreihen:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $a_k := \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ k-2 & \text{sonst.} \end{cases}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k!(x-\mathrm{e})^k$ für $x \in \mathbb{R}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ für $z \in \mathbb{C}$. Bestimme außerdem das Konvergenzverhalten für $|z| = R$.

   (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}$ für $x \in \mathbb{R}$. Bestimme außerdem das Konvergenzverhalten für $|x| = R$.

(2 + 2 + 2,5 + 2,5 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.