Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2015/2016
27.01.2016
Blatt 14

Übungen zu Höhere Mathematik I

(Abgabe spätestens am Mittwoch, den 03.02.2016, 12:00h)

1. Es seien $a_1 \coloneqq 5$ und $a_k \coloneqq 9$ für alle $k \geq 2$, sowie $b_1 \coloneqq 6$ und $b_k = 0$ für alle $k \geq 2$. Zeige, dass dann $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}$ bzw. $0{,}5\overline{9} = 0{,}6$ gilt.

   (3 Punkte)

2. Es sei $\mathcal{M}$ eine Menge. Die sogenannte Indikatorfunktion einer Menge $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ ist wie folgt definiert:

$$\mathbb{1}_{\mathcal{A}} : \mathcal{M} \to \{0,1\}, \qquad \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Existieren die folgenden Grenzwerte $\lim_{x \to x_0} f(x)$? Falls nicht, existieren die Grenzwerte von links und rechts? Begründe Deine Antworten.

   (a) $x_0 = 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \text{falls } x > 0 \\ x^2 + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

   (b) $x_0 = 0$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ f'(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

   wobei f wie in Teilaufgabe (a) definiert sei. Überprüfe in diesem Fall die Existenz von $\lim_{x \to x_0} g(x)$ statt von $\lim_{x \to x_0} f(x)$ (evtl. einseitig).

   (c) $x_0 = 1$ und $f = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A} \coloneqq [0,1]$ und $\mathcal{M} \coloneqq \mathbb{R}$.

   (d) $x_0 = 0$ und $f = \mathbb{1}_{\mathcal{A}}$ mit $\mathcal{A} \coloneqq \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = \frac{1}{y} \right\}$ und $\mathcal{M} \coloneqq \mathbb{R}$.

   (2 + 2 + 2 + 3 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

3. Bei den folgenden Definitionen wurde die übliche Notation verändert. Gib an, welches die Definition von Stetigkeit ist und ordne die verwendete Notation der üblichen Notation zu. Falls es sich nicht um die Definition handelt, gib ein Beispiel für eine Funktion an, die nicht stetig ist, aber die Bedingungen erfüllt, oder eine Funktion die stetig ist, aber die Bedingungen nicht erfüllt.

   (a) Es sei $f \subset \mathbb{R}$ und $D : f \to \mathbb{R}$. Dann heißt D stetig (auf f), wenn

   $$\forall x \in f \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_0 \in U_\varepsilon(x) \cap f\colon \big|D(x_0) - D(x)\big| < \delta$$

   gilt.

   (b) Es sei $\delta \subset \mathbb{R}$ und $x : \delta \to \mathbb{R}$. Dann heißt x stetig (auf δ), wenn

   $$\forall \varepsilon \in \delta \ \exists x_0 > 0 \ \forall D > 0 \ \forall f \in U_{x_0}(\varepsilon) \cap \delta\colon \big|x(f) - x(\varepsilon)\big| < D$$

   gilt.

   (c) Es sei $x_0 \subset \mathbb{R}$ und $\varepsilon : x_0 \to \mathbb{R}$. Dann heißt ε stetig (auf x_0), wenn

   $$\forall D \in x_0 \ \forall f > 0 \ \exists x > 0 \ \forall \delta \in U_x(D) \cap x_0\colon \big|\varepsilon(\delta) - \varepsilon(D)\big| < f$$

   gilt.

(3 + 3 + 3 Punkte)

4. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f(x_0) < y$. Für alle $\delta > 0$ existiert ein $x \in U_\delta(x_0) \cap I$ (das eventuell von δ abhängt), so dass $f(x) \geq y$ gilt. Zeige, dass f dann nicht stetig sein kann.

(3 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte Vorname und Nachname gut lesbar auf das Blatt schreiben, den Nachnamen in Großbuchstaben. Aussagen sind zu begründen und Lösungswege anzugeben.