

## Übungen zu Höhere Mathematik I

(Besprechung der Aufgaben am Mittwoch, den 10.02.2016)

1. Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Eine Abbildung  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Lipschitz-stetig*, wenn ein  $L \in \mathbb{R}$  existiert, so dass

$$\forall x_1, x_2 \in I : |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

gilt.

- (a) Zeige, dass jede Lipschitz-stetige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  auch gleichmäßig stetig ist.
  - (b) Zeige, dass eine differenzierbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Ableitung beschränkt ist, auch Lipschitz-stetig ist.
  - (c) Zeige, dass die Ableitung einer differenzierbaren, Lipschitz-stetigen Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt ist.
  - (d) Zeige, dass aus Lipschitz-Stetigkeit nicht Differenzierbarkeit folgt. Zeige also, dass eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, die Lipschitz-stetig, aber nicht differenzierbar ist.
2. Es seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen.
- (a) Es sei  $c \in \mathbb{R}$  und es gelte  $f'(x) = c$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Zeige, dass dann  $f(x) = cx + f(0)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.
  - (b) Es gelte  $f'(x) = g'(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Zeige, dass dann ein  $c \in \mathbb{R}$  existiert, so dass  $f(x) = g(x) + c$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.

3. Es sei  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

- (a) Zeige, dass  $f$  differenzierbar ist.
- (b) Zeige, dass  $f'$  nicht stetig ist.

4. Bestimme folgende Grenzwerte, sofern sie existieren. Begründe andernfalls, weshalb sie nicht existieren.

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ .
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , wobei  $a_n := n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.
- (c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{\log x}$ .
- (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^{-\alpha})}{x^\alpha}$  für  $\alpha \in \mathbb{R}$ .