Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2015
16.04.2015
Blatt 01

Übungen zu Extremwerttheorie

(Zu Bearbeiten bis Donnerstag, den 23.04.2015, 16:00h)

1. Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien $X_1, \ldots, X_n$ i. i. d. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F.

   (a) Bestimme die Verteilung der Zufallsvariable $m_n := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ in Abhängigkeit von F.

   (b) Bestimme die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen m_n und $M_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ in Abhängikeit von F.

(1 + 2 Punkte)

2. Für ein $\beta \in \mathbb{R}$ seien $f_\beta, g\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit $f_\beta(t) := \exp\big((\log t)^\beta\big)$ und $g(t) := 3 + \cos t$.

   (a) Zeige, dass f_β für $\beta < 1$ langsam variierend ist.

   (b) Bestimme alle $\beta \geq 1$, für die f regulär variierend ist und gib den zugehörigen Index α an.

   (c) Untersuche, ob g regulär variierend ist und gib gegebenenfalls den Index α an.

   (d) Es seien $\alpha > 2$, $\beta \in \mathbb{R}$ und $x > \mathrm{e}$. Zeige, dass $\exp\big(x^\alpha\big) \in \Gamma$ und $\big(\log\log x\big)^\beta \in \Pi$ gilt. Gib jeweils die Hilfsfunktionen an.

(2 + 2 + 2 + 3 Punkte)

3.* Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien $X_1, \ldots, X_n$ i. i. d. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F und Y sei eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion G und Dichte g. Mit G^{*2} bezeichnen wir die Verteilung, deren Dichte durch die Faltung von g mit sich selbst gegeben ist. Für $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ gelte $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Y$.

   Zeige, dass $G(x) = G^{*2}(\sqrt{2}x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

   Hinweis: Eventuell ist die Schreibweise $S_{2n} = \big(S_{2n} - S_n\big) + S_n$ hilfreich.

(4 Bonuspunkte)