Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2015
23.04.2015
Blatt 02

Übungen zu Extremwerttheorie

(Zu Bearbeiten bis Donnerstag, den 30.04.2015, 16:00h)

1. Für zwei Verteilungsfunktionen F und G schreiben wir $F \bowtie G$, genau dann, wenn ein $a > 0$ und ein $b \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $F(x) = G(ax + b)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

   Zeige, dass $\bowtie$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der reellen Verteilungsfunktionen ist.

   (6 Punkte)

2. Erzeuge eine Realisierung einer Folge $X_1, \ldots, X_n$ von i. i. d. Exp(1)-verteilten Zufallsvariablen mit $n \geq 10\,000$. Berechne dann für $k = 1, \ldots, n$ die Folgen M_k und L_k, wobei

$$M_k := \max\{X_1, \ldots, X_k\}$$
$$L_k := \min\{j : X_j = M_k\}$$

   also ist M_k das Maximum der ersten k Folgenglieder und L_k der Index, bei dem der k-te Rekord auftritt.

   Erstelle einen Plot der Folge $\frac{\log L_k}{k}$. Versuche durch weitere Plots eine Funktion $a(n)$ zu finden, so dass $\frac{M_n}{a(n)} \to 1$ für $n \to \infty$ gilt.

   (6 Punkte)

3.* (a) Es sei F^{-1} die Quantilfunktion zu einer Verteilung F auf $\mathbb{R}$. Beweise Lemma 1.2 (ii), zeige also, dass

$$F^{-1}\big(F(x)\big) \leq x \leq F^{-1}\big(F(x)+\big)$$
$$F\big(F^{-1}(y)-\big) \leq y \leq F\big(F^{-1}(y)\big)$$

   für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $F(x) > 0$ und für alle $y \in (0, 1]$ gilt. Wie in der Vorlesung bezeichnen $F(x+)$ bzw. $F(x-)$ den rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert der Funktion F an der Stelle x.

   (b) Für die Verteilungsfunktionen F und G gelte $F(x) = G(x)$ für alle $x \in C(F) \cap C(G)$. Zeige, dass dann auch $F(x) = G(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

   (c) Die Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Verteilungsfunktionen, die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie die Verteilungsfunktion G erfüllen die Voraussetzungen von Satz 1.3 und es gelte

$$F_n(a_n x + b_n) \to G(x)$$

   für $n \to \infty$ und alle $x \in C(G)$. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ für ein $x \in C(G)$. Zeige, dass dann

$$F_n(a_n x_n + b_n) \to G(x)$$

   für $n \to \infty$ gilt.

   (2 + 2 + 2 Bonuspunkte)