Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2015
30.04.2015
Blatt 03

Übungen zu Extremwerttheorie

(Zu Bearbeiten bis Donnerstag, den 07.05.2015, 12:00h)

1. Es sei $c \in \mathbb{R}$ und $P(X = c) = 1$. Außerdem sei $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen.

   (a) Zeige, dass

   $$X_n \overset{d}{\to} X \qquad \Longleftrightarrow \qquad X_n \overset{P}{\to} X$$

   für $n \to \infty$ gilt.

   (b) Zusätzlich sei die Folge $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher monoton wachsend. Zeige, dass dann

   $$X_n \overset{d}{\to} X \qquad \Longleftrightarrow \qquad X_n \overset{\text{f.s.}}{\to} X$$

   für $n \to \infty$ gilt.

   Hinweis: Die Äquivalenz

   $$X_n \overset{\text{f.s.}}{\to} X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(|X_k - X| \leq \varepsilon, \text{ für alle } k \geq n\right) = 1$$

   darf ohne Beweis verwendet werden.

   (3 + 3 Punkte)

2. Es sei $\alpha > 0$. Zeige, dass die folgenden Verteilungen G max-stabil sind.

   (a) $G(x) = \exp\left(-x^{-\alpha}\right) \mathbb{1}(x > 0)$,

   (b) $G(x) = \exp\left(-(-x)^{\alpha}\right) \mathbb{1}(x \leq 0) + \mathbb{1}(x > 0)$

   (2 + 2 Punkte)

3. (a) Betrachte $F(x) := 1 - x^{-\alpha}$ für $x \geq 1$ und ein $\alpha > 0$. Liegt F im Anziehungsbereich einer der drei max-stabilen Verteilungen aus der Vorlesung (Satz 2.3)? Gib gegebenenfalls die passenden Folgen a_n und b_n an oder begründe, weshalb F in keinem Anziehungsbereich liegt.

   (b) Es seien $0 < p < 1$, $X_i \sim B(1, p)$ und $M_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Zeige, dass es keine Folgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n(M_n - b_n) \overset{d}{\to} Y \sim G$ für eine nicht-entartete Verteilung G gilt.

   (2 Punkte + 2 Bonuspunkte)