Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2015
07.05.2015
Blatt 04

Übungen zu Extremwerttheorie

(Zu Bearbeiten bis Donnerstag, den 21.05.2015, 12:00h)

1. Entscheide für jede der folgenden Verteilungsfunktionen, ob sie im Anziehungsbereich einer Extremwertverteilung liegt und begründe dies. Gib gegebenenfalls die Extremwertverteilung G, sowie passende Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $F^n(a_n x + b_n) \to G(x)$ an.

   (a) $F(x) = \Big(1 - \exp\big(-(\mu x)^\alpha\big)\Big)\mathbb{1}(x \geq 0)$ für $\mu, \alpha > 0$.

   (b) $F(x) = x\mathbb{1}(0 \leq x \leq 1) + \mathbb{1}(x > 1)$.

   (c) $F(x) = \Big(1 - \big(\frac{\gamma}{\gamma + x^\beta}\big)^\alpha\Big)\mathbb{1}(x \geq 0)$ für $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

   (d) $F(x) = \Big(1 - x^p \exp\big(\mu(1-x)\big)\Big)\mathbb{1}(x \geq 1)$ für $\mu, p > 0$.

   (e) F ist die Verteilungsfunktion der geometrischen Verteilung mit Parameter $p \in (0,1)$.

   (f) $F(x) = \sum_{n=1}^\infty \big(1 - \frac{1}{n}\big)\mathbb{1}\big(1 - \frac{1}{n} \leq x < 1 - \frac{1}{n+1}\big) + \mathbb{1}(x \geq 1)$.

   Hinweis: Eventuell ist die Lambertsche W-Funktion hilfreich. Es handelt sich dabei um die Umkehrfunktion zu $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$, also gilt $y = x\,\mathrm{e}^x \iff x = W(y)$.

   (2 + 2 + 2 Punkte und 2 + 2 + 2 Bonuspunkte)

2. Erzeuge für $n \in \{500, 2\,000, 8\,000\}$ jeweils $k = 250$ Realisierungen von $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, einmal für $X_i \sim \mathrm{Exp}(1)$ i. i. d. und einmal für $X_i \sim \mathrm{N}(0,1)$ i. i. d. Bestimme jeweils Folgen $a_n > 0$ und $b_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$Z_n := \frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} Y \sim G$$

   für $n \to \infty$ mit $G(x) = \exp\big(-\exp(-x)\big)$ gilt (siehe Vorlesung). Nun sei $\hat{F}_k(x)$ die empirische Verteilungsfunktion der Z_n. Bestimme $\max_{x\in\mathbb{R}}\big|\hat{F}_k(x) - G(x)\big|$ und erstelle einen Plot von $\big|\hat{F}_k - G\big|$. Wiederhole alles mit $k = 1\,000$. Was fällt auf?

   (6 Punkte)