Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2015
28.05.2015
Blatt 06

Übungen zu Extremwerttheorie

(Zu Bearbeiten bis Donnerstag, den 11.06.2015, 12:00h)

1. Es seien $N, X_1, X_2, \ldots$ unabhängig, $\lambda > 0$, $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ und $X_i \sim \mathrm{Exp}(1)$ für $i \in \mathbb{N}$ sowie $M \coloneqq \max\{X_1, \ldots, X_N\}$ (im Fall $N = 0$ sei $M = 0$).

   (a) Bestimme die Verteilung F_M von M.

   (b) Handelt es sich bei F_M um eine verallgemeinerte Extremalverteilung? Bestimme gegebenenfalls ξ, μ, β mit $H_{\xi,\mu,\beta}(x) = F_M(x)$ für alle $x > 0$ oder begründe weshalb es sich um keine verallgemeinerte Extremalverteilung handelt.

   (c) Zeige, dass $\mathbb{E}(M^r) < \infty$ für alle $r > 0$ gilt.

(2 Punkte und $1 + 1$ Bonuspunkte)

2. Es seien X_i i. i. d. mit Dichte f (und Verteilung F). Außerdem sei

$$N_n \coloneqq \min\bigl\{k \in \mathbb{N} : X_{n+k} > \max\{X_1, \ldots, X_n\}\bigr\}.$$

   Bestimme $\mathbb{P}(N_n = m)$ für $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{E}(N_n)$.

($3 + 2$ Punkte)

3. Es sei $X \sim H_{\xi,\mu,\beta}$ und $r > 0$. Beweise die folgende Teilaussage von Lemma 3.1:

$$\mathbb{E}\Bigl(X H^r_{\xi,\mu,\beta}(X)\Bigr) = \begin{cases} \frac{\xi\mu-\beta}{\xi(r+1)} + \frac{\beta}{\xi}(r+1)^{\xi-1}\Gamma(1-\xi) & \text{falls } \xi \neq 0, \\ \frac{\mu}{r+1} + \frac{\beta}{r+1}\bigl(\ln(r+1) - \Gamma'(1)\bigr) & \text{falls } \xi = 0. \end{cases}$$

   Dabei gilt wie üblich:

$$\Gamma(x) \coloneqq \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,$$
$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t.$$

   Hinweis: Eventuell sind die Substitutionen $H(u) = v$ und $\ln\frac{1}{v} = w$ hilfreich.

(2,5 + 2,5 Punkte)