Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2015
11.06.2015
Blatt 07

# Übungen zu Extremwerttheorie

(Zu Bearbeiten bis Donnerstag, den 18.06.2015, 12:00h)

1. Es sei $F$ eine stetige Verteilungsfunktion mit Dichte $f$ und $X_1, \dots, X_n \sim F$ sei eine i. i. d. Stichprobe. Außerdem sei $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \le j \le n$.

   (a) Zeige, dass für die Verteilung der $j$-ten Ordnungsstatistik

   $$\mathbb{P}(X_{(j)} \le x) = \sum_{\nu=j}^{n} \binom{n}{\nu} F^{\nu}(x)\overline{F}^{n-\nu}(x) = j\binom{n}{j} \int_0^{F(x)} t^{j-1}(1-t)^{n-j}\,\mathrm{d}t$$

   gilt.

   (b) Zeige, dass $\mathbb{E}\Big(F\big(X_{(j)}\big)\Big) = \frac{j}{n+1}$ gilt.

   *Hinweis*: Für die Beta-Funktion $B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ gilt $B(x,y) = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$, falls $x, y \in \mathbb{N}$.

   (2,5 + 2,5 Punkte)

2. Erzeuge $k = 250$ Realisierungen $Z_n$ wie bei Aufgabe 2 von Blatt 4 mit $n \in \{2, 20, 200, 2000\}$, jeweils basierend auf Stichproben $X_i \sim \mathrm{Exp}(1)$ und $X_i \sim \mathrm{N}(0,1)$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Erzeuge zusätzlich $k = 250$ Realisierungen $Y_1, \dots, Y_k$ der Gumbelverteilung durch die Inversionsmethode. Dabei verwendet man

   $$U \sim \mathrm{U}[0,1] \quad\Longrightarrow\quad Y := \Lambda^{-1}(U) \sim \Lambda$$

   und eine Stichprobe $U_1, \dots, U_k$ der Standardgleichverteilung.

   Erstelle für jedes $n \in \{2, 20, 200, 2000\}$ einen gemeinsamen PP-Plot, QQ-Plot und Exzess-Plot der drei Realisierungen.

   (3 Punkte + 3 Bonuspunkte)

3. Es seien $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n \sim \mathrm{Exp}(1)$ eine i. i. d. Stichprobe.

   (a) Zeige, dass die Dichte $f$ des Zufallsvektors $\big(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}\big)^\top$ durch

   $$f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} n! \exp\big(-\sum_{i=1}^n x_i\big) & \text{falls } x_1 < \ldots < x_n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   gegeben ist.

   (b) Zeige, dass die beiden Zufallsvektoren $\big(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}\big)^\top$ und

   $$\left(\frac{Y_1}{n}, \frac{Y_1}{n} + \frac{Y_2}{n-1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{n-(i-1)}\right)^\top$$

   identisch verteilt sind.

   (c) Es seien $j, k \in \{1, \dots, n\}$ mit $j \neq k$. Bestimme $\mathbb{E}\big(X_{(j)}\big)$, $\mathrm{Var}\big(X_{(j)}\big)$ und $\mathrm{Cov}\big(X_{(j)}, X_{(k)}\big)$

   (2 Punkt + 3 Bonuspunkte + 2 Punkte)