

Übungen zu Extremwerttheorie

(Zu Bearbeiten bis Donnerstag, den 25.06.2015, 12:00h)

1. Es seien V_1, \dots, V_n eine Stichprobe der Pareto-Verteilung, also $V_i \sim G$ mit $G(x) = (1 - \frac{1}{x})\mathbf{1}(x \geq 1)$.
 - (a) Zeige $\mathbb{E}(V_{k:n}) = \frac{n}{k-1}$ für $k > 1$.
 - (b) Zeige $\mathbb{E}(V_{k:n}^2) = \frac{n(n-1)}{(k-1)(k-2)}$ für $k > 2$.
 - (c) Es gelte $k_n \rightarrow \infty$ sowie $\frac{k_n}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Zeige $\text{Var}(\frac{k_n}{n} V_{k_n:n}) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Hinweis: Zeige zunächst mittels partieller Integration: Aus $\mathbb{P}(X > 0) = 1$ folgt $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \bar{F}(x) dx$ und $\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\infty 2x\bar{F}(x) dx$.

(2 Punkte + 2 Bonuspunkte + 1 Punkt)

2. Lade die täglichen Wasserstandsdaten der Donau bei Neu-Ulm aus den Jahren 1982 bis 2014 von der [Homepage des Gewässerkundlichen Dienstes Bayern](#). Verwende das auf der Vorlesungsseite verfügbare R-Skript `Wasseraufbereitung.R`, um die Daten einzulesen und aufzubereiten. Bestimme den maximalen Pegelstand X_i jedes Jahres. Wir gehen davon aus, dass X_1, \dots, X_{33} eine Stichprobe einer verallgemeinerten Extremwertverteilung $H_{\xi, \mu, \beta}$ ist.
 - (a) Berechne die verallgemeinerten Momente \hat{w}_0, \hat{w}_1 und \hat{w}_2 der Stichprobe. Berechne damit dann Schätzer $\hat{\xi}, \hat{\mu}$ und $\hat{\beta}$ für die Parameter der zugrundeliegenden Verteilung.
 - (b) Berechne Schätzer $\hat{\xi}_{\text{ML}}, \hat{\mu}_{\text{ML}}$ und $\hat{\beta}_{\text{ML}}$ mit der Maximum-Likelihood-Methode. Verwende als Startwert für die numerische Optimierung die Schätzer der verallgemeinerten Momentenmethode aus Teilaufgabe (a).
 - (c) Bestimme mit den Schätzern aus den Teilaufgaben (a) und (b) jeweils die Höhe eines Deichs, der im Mittel nur alle 50 Jahre überflutet werden wird.

Hinweis: Mit der Funktion `uniroot()` können numerisch Nullstellen einer Funktion (näherungsweise) bestimmt werden. Mit der Funktion `optim()` kann numerisch eine Funktion in mehreren Dimensionen minimiert werden.

(3,5 + 3,5 + 2 Punkte)