Prof. Dr. U. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2015
25.06.2015
Blatt 09

Übungen zu Extremwerttheorie

(Zu Bearbeiten bis Donnerstag, den 02.07.2015, 12:00h)

1. Es seien F invertierbar, $X \sim F$ und $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$. Zeige, dass

$$X \overset{d}{=} U\big(\mathrm{e}^{Y}\big)$$

für $U(t) = F^{-1}\big(1 - \frac{1}{t}\big)$ gilt.

(3 Punkte)

2. Erzeuge für $i \in \{1,2,3\}$ und $j \in \{1,\dots,1\,000\}$ i. i. d. Realisierungen von $X_{i,j} \sim F_i$, wobei $F_1 = \mathrm{Exp}(1)$, $F_2 = \mathrm{U}[0,1]$ und

$$F_3(x) := \Big(1 - \frac{1}{2}x^{-2}\big(1 + x^{-2}\big)\Big)\mathbb{1}(x \geq 1).$$

Berechne für $i \in \{1,2,3\}$ und $k \in \big\{1,\dots,\lfloor\frac{n}{4}\rfloor\big\}$ den Pickands-Schätzer $\hat{\xi}^{(\mathrm{P})}_{i,k}$. Berechne für $i \in \{1,2,3\}$ und $k \in \{1,\dots,n\}$ den Hill-Schätzer $\hat{\alpha}^{(\mathrm{H})}_{i,k}$ und den Dekkers-Einmahl-de-Haan-Schätzer $\hat{\xi}^{(\mathrm{DEdH})}_{i,k}$, der durch

$$\hat{\xi}^{(\mathrm{DEdH})}_{i,k} := 1 + H^{(1)}_{i,k} + \frac{1}{2}\left(\frac{\big(H^{(1)}_{i,k}\big)^2}{H^{(2)}_{i,k}} - 1\right)^{-1},$$

$$H^{(\nu)}_{i,k} := \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k}\big(\log X_{i,(m:n)} - \log X_{i,(k+1:n)}\big)^{\nu}$$

gegeben ist. Erstelle dann für jedes i einen gemeinsamen Plot der Punkte $\big(k, \hat{\xi}^{(\mathrm{P})}_{i,k}\big)$, $\big(k, \hat{\xi}^{(\mathrm{H})}_{i,k}\big)$ und $\big(k, \hat{\xi}^{(\mathrm{DEdH})}_{i,k}\big)$ mit allen verfügbaren k sowie $\hat{\xi}^{(\mathrm{H})}_{i,k} := \big(\hat{\alpha}^{(\mathrm{H})}_{i,k}\big)^{-1}$. Bei welchem k sollte man die Schätzer jeweils betrachten?

(9 Punkte)